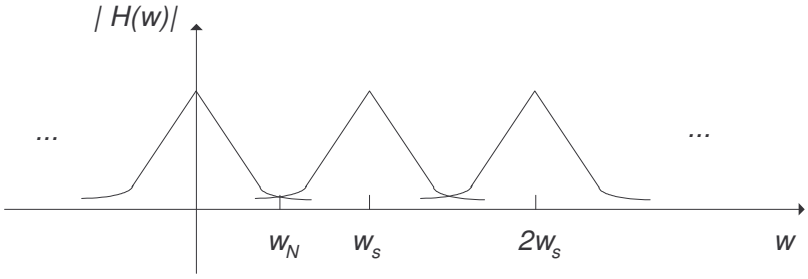
Amostragem



- frequência de amostragem: $w_s = \dfrac{2\pi}{h}$

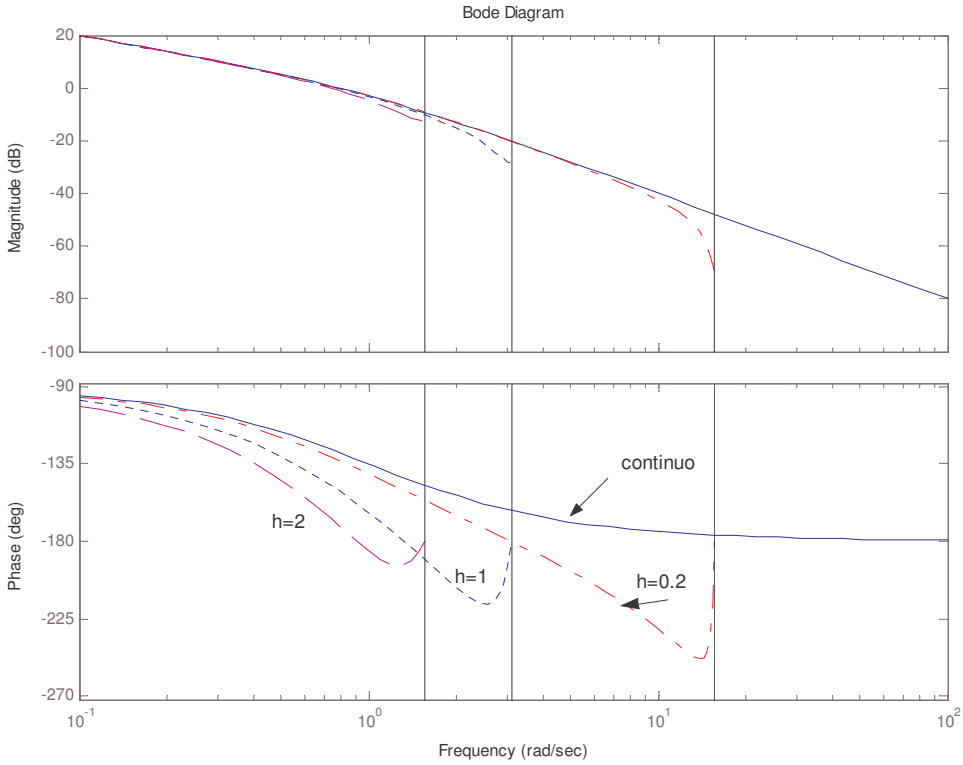
- frequência de Nyquist: $w_N = \dfrac{w_s}{2} = \dfrac{\pi}{h}$

- para não ocorrer aliasing: a operação de amostragem é geralmente precedida por um filtro passa-baixo anti-alias.

Efeito do período de amostragem na resposta em frequência

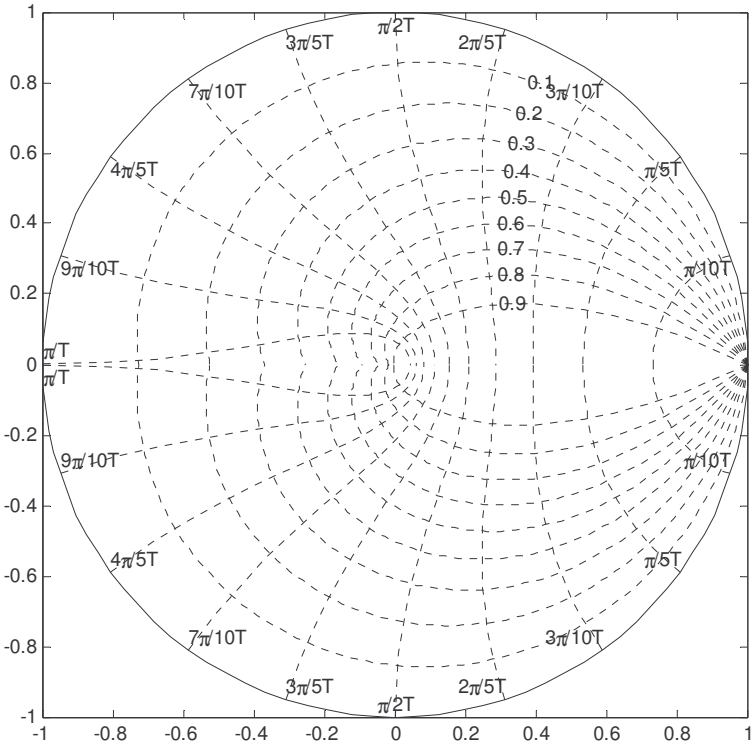
Exemplo: $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$

Resposta em frequência do equivalente discreto para h=0.2, 1 e 2 seg.



Especificações de projecto em Matlab:

Localização desejada dos pólos (utilização do comando zgrid em Matlab)



- traça as linhas ξ constante para valores em degraus de 0.1;

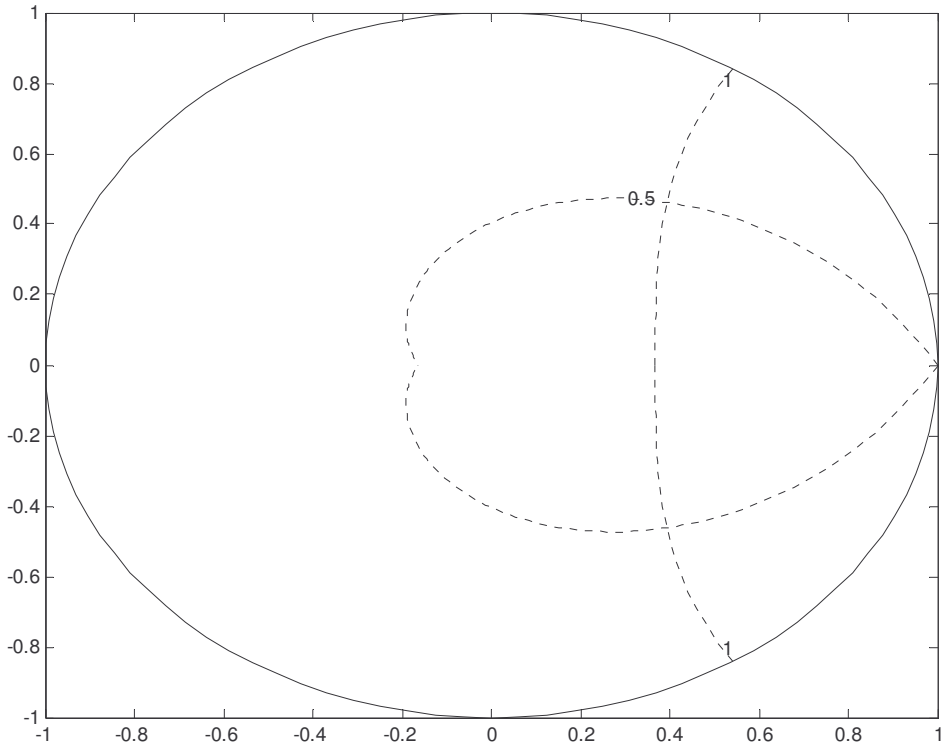
- traça as linha para $w_n = \dfrac{N\pi}{10h}$ para inteiros N de 1 a 10;

Exemplo: especificações de projecto

$\xi \geq 0.5$

$w_n \geq 1$

$\xi w_n \geq 0.5$



Escolha do período de amostragem, *h*

- Períodos muito grandes tornam impossível a reconstrução do sinal.
- Períodos pequenos aumentam a carga do processador
    - Menor tempo para os cálculos
    - O tempo de conversão A/D tem de ser menor
    - Maior custo do sistema
- O comando de controlo poderá ocorrer em qualquer instante dentro do período de amostragem, h.
- Melhor opção é escolher o maior período de amostragem que garanta as especificações.

Limite inferior teórico (teorema da amostragem)

$$\frac{w_s}{w_b} > 2$$

Na prática (garantia de suavidade)

$$20 < \frac{w_s}{w_b} < 40 \quad \text{(Franklin)}$$

Método de Tustin

- faz um mapeamento da região estável *s* exactamente na região estável z.
- faz um mapeamento do eixo jw do plano s no círculo unitário
- o mapeamento provoca uma distorção de frequência dada por:

$$w' = \frac{2}{h} \tan \frac{wh}{2}$$

- o mapeamento de Tustin com pré-warping é dado por :

$$s' = \frac{w_1}{\tan \frac{w_1 h}{2}} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

w_1 é a frequência de referência para a qual a distorção é completamente eliminada (normalmente escolhida a frequência de corte do sistema)

Sintonização do controlador pelo método directo (em discreto)

Exemplo de aplicação

Pretende-se projectar um controlador PI para controlar o processo

$G(s) = \dfrac{1}{s+1}$.

Especificações de projecto:

- $\xi = 0.7$

- wn=5 rad/s

- h=0.1 seg

resolução:

- Obter equivalente discreto de G(s) precedido por ZOH

$$G(z) = \frac{1-e^{-ah}}{z-e^{-ah}}$$

- Obter PI discreto (por um método de aproximação, por ex. tustin)

$$C(z) = Kp + Ki\frac{h}{2}\frac{z+1}{z-1}$$

- eq. característica desejada (sist. 2ª ordem)

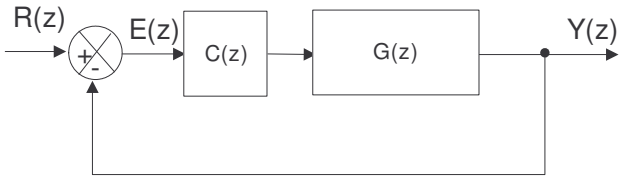
$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

com (Tabela A.6):

$a_1 = -2e^{-\varsigma w_n h}.\cos(w_d h)$

$a_2 = e^{-2\varsigma w_n h}$

Sistema de controlo em discreto



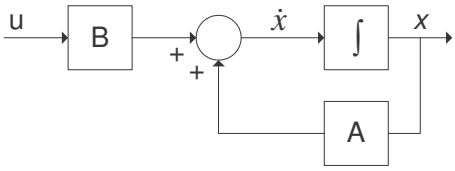
$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z).G(z)}{1 + C(z).G(z)}$$

- igualar a eq. característica do sistema $1 + C(z).G(z) = 0$ à eq. característica desejada $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$

REGULAÇÃO por realimentação de estados

(A análise é idêntica para sistema contínuo e discreto)

Sistema em Malha Aberta

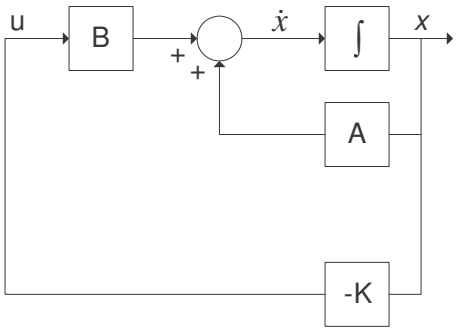


$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

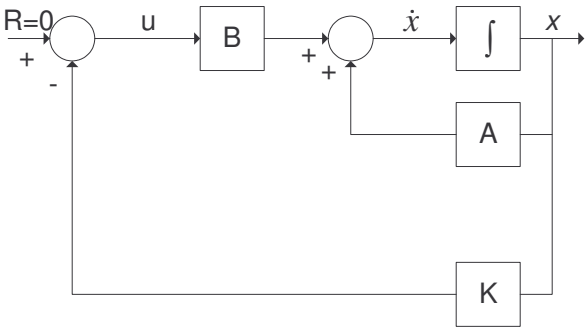
Pólos do sistema são dados pelo determinante de *sI-A* (|*sI-A*|)

Sistema em Malha Fechada

Estrutura do regulador: assume R=0



ou



$$u = -Kx \Leftrightarrow u = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

Pólos do sistema em MF são dados pelo determinante de (*sI-A+B.K*) ou seja |*sI-A+BK*|

COLOCAÇÃO de PÓLOS

- escolha da localização dos pólos em malha fechada
- o projecto do controlador consiste em obter os valores de K de forma aos pólos em MF ficarem nas posições desejadas

Assumindo que queremos pólos localizados em

$$s_i = p_1, p_2, \cdots, p_n$$

A eq. característica corresponde a:

$$P(s) = (s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n) = 0$$

Se igualarmos esta equação à eq. característica do sistema em MF $|sI\text{-}A+BK|=0$, obtém-se os valores do controlador K.

Exemplo de aplicação: Controlo de orientação de um satélite

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix}$$

Especificações de projecto:

- $\xi = 0.5$

- parte real de s=-1.8 rad/s

Período de amostragem: h=0.1 s

Solução:

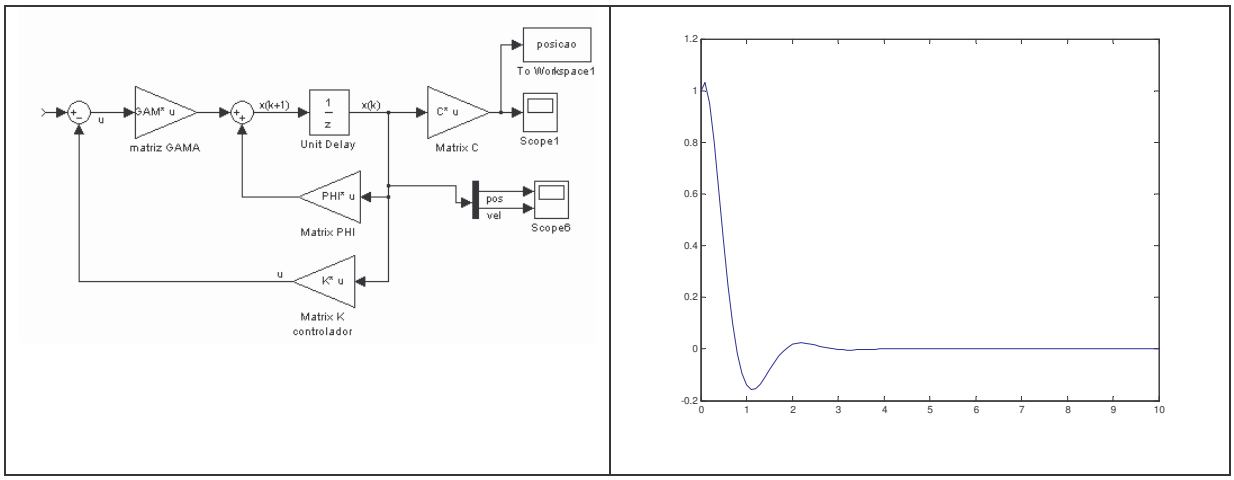
Eq. característica desejada:

$$z^2 - 1.6z + 0.7 = 0$$

Eq. característica do sistema em Malha Fechada

$$z^2 + z(hK_2 + \frac{h^2}{2}K_1 - 2) + 1 - hK_2 + \frac{h^2}{2}K_1 = 0$$

$$\begin{cases} K_1 = 10 \\ K_2 = 3.5 \end{cases}$$



- A forma de cálculo obtida atrás pode-se tornar fastidiosa

- A álgebra para encontrar os valores de K é especialmente simples se as matrizes se encontrarem na forma controlável:

$$\phi_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Gamma_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

A eq. característica correspondente é:

$$z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$$

Em malha fechada: $\phi_c - \Gamma_c K$

$$\phi_c - \Gamma_c K = \begin{bmatrix} -a_1 - K_1 & -a_2 - K_2 & -a_3 - K_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A eq. característica correspondente é:

$$z^3 + (a_1 + K_1) z^2 + (a_2 + K_2) z + (a_3 + K_3) = 0$$

Se os pólos desejados resultarem na eq. característica:

$$z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3 = 0$$

Os ganhos do controlador são dados directamente por:

$$K_1 = \alpha_1 - a_1 \quad K_2 = \alpha_2 - a_2 \quad K_3 = \alpha_3 - a_3$$

Para aplicar este método é necessário que as equações de estado se encontrem na forma controlável, sendo para isso necessário calcular a matriz de transformação.

Controlabilidade

A questão que se coloca é: será sempre possível encontrar um equivalente (ϕ_c, Γ_c) de um sistema (ϕ, Γ) arbitrário?

- A resposta é quase sempre sim.
- a excepção ocorre qd o sistema tem certos modos não afectados pelo controlo.
- a melhor forma de analisar a não controlabilidade passa pela representação em que cada estado representa um modo natural do sistema, ou seja, na forma canónica de Jordan:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{bmatrix} u(k)$$

- nenhum elemento de Γ pode ser zero. Se qualquer elemento for zero, o controlo não influenciará o modo natural, e o estado associado permanecerá não controlado.

O Matlab possui duas funções para calcular o valor de K:

- K=acker(PHI,GAM, pólos desejados))
    - (aplicação da fórmula de Ackermann)
    - apenas pode ser utilizado para sistemas SISO
    - utilizado para ordens inferiores a 10
    - pode ser utilizado para raízes repetidas

- K=place(PHI,GAM, pólos desejados))
    - aplicação da fórmula de Kautsky
    - pode ser utilizado para sistemas MIMO
    - utilização para sistemas de ordem superior a 10
    - não pode ser utilizado para raízes repetidas

Fórmula de Ackermann:

Seja o sistema $x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k)$

A fórmula de Ackermann é dada por:

$$\boxed{K = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma & \phi\Gamma & \phi^2\Gamma & \cdots & \phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}^{-1} P(\phi)}$$

onde

$W_c = \begin{bmatrix} \Gamma & \phi\Gamma & \phi^2\Gamma & \cdots & \phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}$

é a matriz de controlabilidade

$P(\phi) = \phi^n + \alpha_1 \phi^{n-1} + \alpha_2 \phi^{n-2} + \cdots + \alpha_n I$

em que os α_i são os coeficientes da eq. característica desejada

$z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0$

Dedução da fórmula de Ackermann

Seja o sistema $x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k)$ controlável

Cuja matriz de controlabilidade é:

$W_c = \begin{bmatrix} \Gamma & \phi\Gamma & \phi^2\Gamma & \cdots & \phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}$

Então, o sistema pode ser transformado na forma canónica controlável mudando as variáveis de estado através da transformação de $z=Tx$:

$$z(k+1)=\tilde{\phi}x(k)+\tilde{\Gamma}u(k)$$

onde

$$\tilde{\phi}=\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{\Gamma}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

A lei de realimentação é dada por:

$$u=-\tilde{L}z=\begin{bmatrix}\alpha_1-a_1 & \alpha_2-a_2 & \alpha_3-a_3\end{bmatrix}z$$

Dá um sistema em MF com o polinómio

$$P(z)=z^n+\alpha_1 z^{n-1}+\cdots+\alpha_n$$

A solução do problema original

$$u=-\tilde{L}z=-\tilde{L}Tx=-Lx$$

As matrizes de controlabilidade estão relacionadas através de:

$$\tilde{W}_c=TW_c$$

pelo que

$$T = \tilde{W}_c W_c^{-1}$$

$$L = \begin{bmatrix} \alpha_1 - a_1 & \alpha_2 - a_2 & \alpha_3 - a_3 \end{bmatrix} \tilde{W}_c W_c^{-1}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} W_c^{-1} P(\phi)$$

$$P(\phi) = \phi^n + \alpha_1 \phi^{n-1} + \alpha_2 \phi^{n-2} + \cdots + \alpha_n I$$

Exemplo: Controlo de orientação de um satélite (exemplo anterior)

Utilize fórmula de Ackermann para obter os ganhos de realimentação.

Controlo Deadbeat

- se a localização dos pólos desejados estiverem na origem, o Polinómio característico correspondente é:

$$P(z) = z^n$$

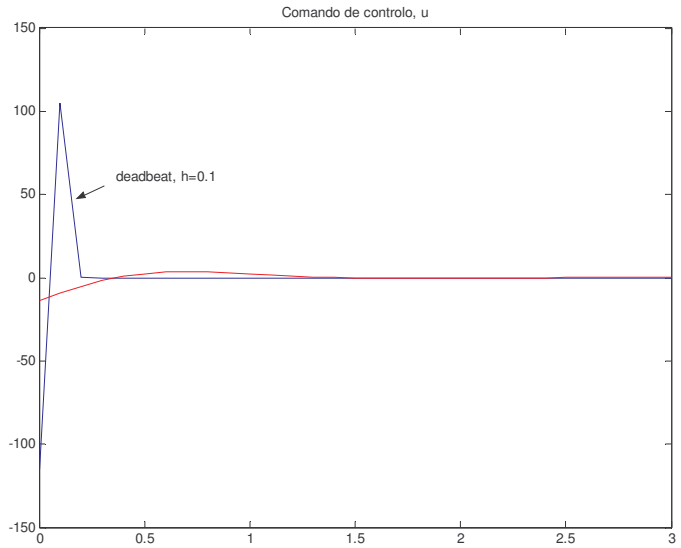
e

$$P(\phi) = \phi^n$$

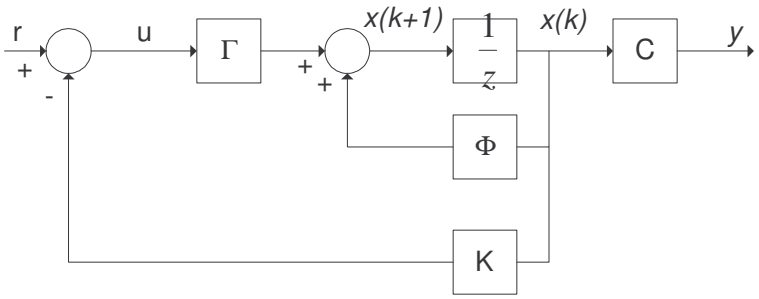
sendo o controlador L dado por: $L = [0 \quad \cdots \quad 1] W_c^{-1} \phi^n$

- no projecto de um controlador deadbeat, o único parâmetro de projecto é o período de amostragem
- o tempo de estabelecimento é no máximo nh , em que n é é a ordem do sistema e h o período de amostragem
- a acção de comando aumenta drástica/ com a diminuição de h
- o controlador deadbeat apenas existe para sistemas discretos

<u>Exemplo do controlo de orientação de satélite</u>



Entrada de referência (seguidor)



$$x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k)$$

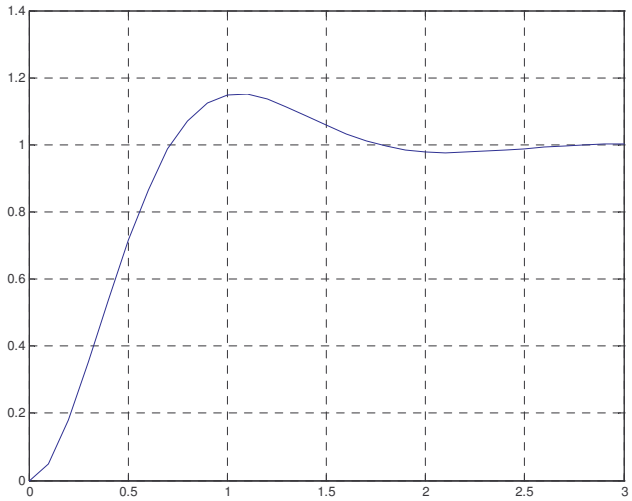
$$u(k) = r(k) - Kx(k)$$

Chega-se a:

$$x(k+1) = (\phi - \Gamma K)x(k) + \Gamma r(k)$$

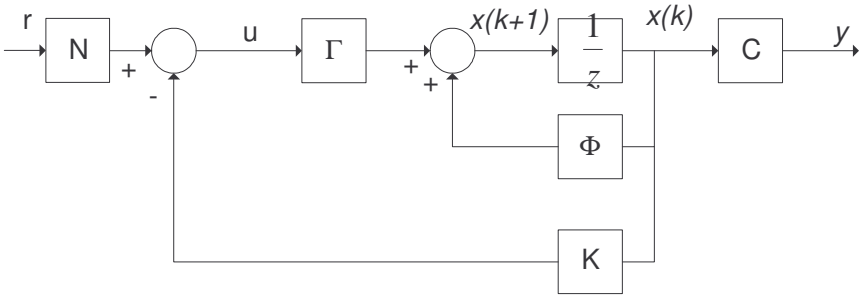
<u>Exemplo do controlo de orientação do satélite</u>

Entrada r(k) em degrau de amplitude 10



- saída tende para 1
- tem de se incluir ganho de referencia

Ganho de referência N



Chega-se a :

$$x(k+1) = (\phi - \Gamma K)x(k) + \Gamma N r(k)$$

a eq. característica é dada por: $| zI - \phi + \Gamma K | = 0$

Para anular o erro em regime estacionário verificamos pela resposta anterior que: N=10

- uma forma de obter **N** passa pela utilização da F.T. em MF:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = C(zI - \Phi + \Gamma K)^{-1}\Gamma N$$

e ver qual o valor em regime estacionário para uma entrada em degrau

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} F(z) \frac{z}{z-1} = \lim_{z\to 1} F(z)$$

Igualando o valor em regime estacionário à entrada obtém-se o ganho N

Exemplo do controlo de orientação do satélite

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix} \qquad C=[1\ 0] \qquad h=0.1$$

Aplicando directamente $F(z) = \dfrac{Y(z)}{R(z)} = C(zI - \Phi + \Gamma K)^{-1}\Gamma N$

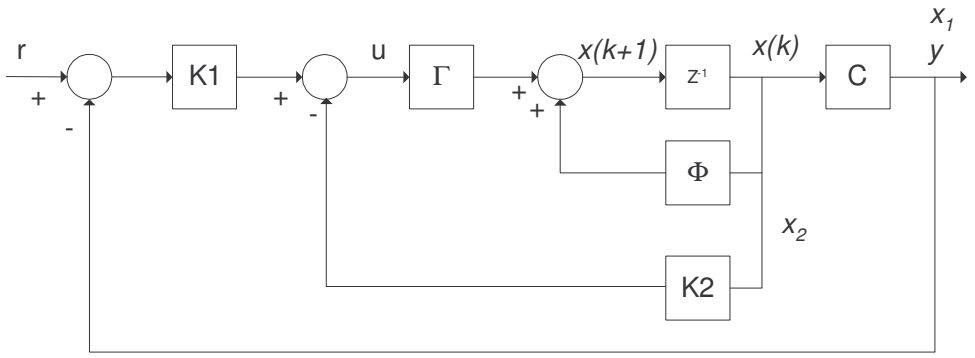
Com z=1 (regime estacionário) e assumindo N=1, obtém-se

- o Ganho DC do sistema igual a 0.1 logo, N=10

Outra estrutura possível do seguidor (qd o processo é do tipo 1)

Assumindo por exemplo:

- n=2;
- variável a seguir x1
- controlador [K1 K2]



A equação de estado do seguidor é

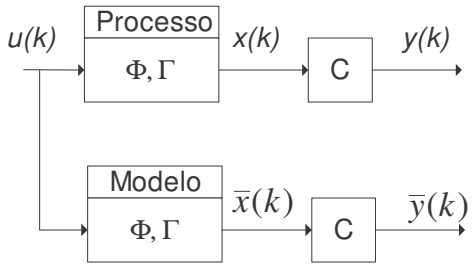
$x(k+1) = (\phi - \Gamma K)x(k) + \Gamma K_1 r(k)$, ou seja, N=$K_1$

Estimadores (Observadores)

- o projecto do controlador até agora assumiu que todos os estados estavam disponíveis para realimentação
- nem todos os estados podem ser medidos (ou por questões físicas ou económicas), tendo assim de ser recoknstruídos
- Existem 2 tipos básicos de estimadores:
    - **estimador corrente**, $\hat{x}(k)$ se baseado nas medidas até y(k), incluindo o instante k
    - **estimador predictor**, $\bar{x}(k)$ se baseado nas medidas até y(k-1)
- teremos assim $u(k) = -K\hat{x}(k)$ ou $u = -K\bar{x}(k)$

Estimador Predictor

Estimador em Malha Aberta



- o erro de estimação é dado por:

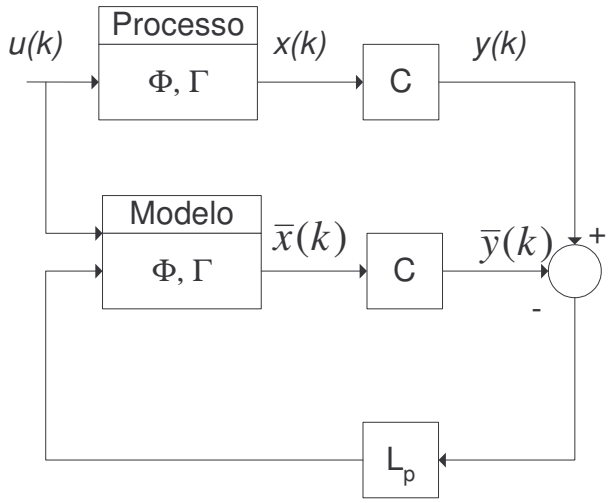
$$\tilde{x} = x - \bar{x}$$

Substituindo as equações de estado do sistema e do estimador na expressão anterior obtemos:

$$\tilde{x}(k+1) = \phi\tilde{x}(k)$$

- em Malha Aberta o erro de estimação nunca irá diminuir para um sistema instável. Para um sistema estável o erro irá diminuir, mas apenas porque o sistema e o estimador tendem para zero.
- se realimentarmos a diferença entre a saída medida e a saída estimada, a divergência do erro será minimizada.

Estimador em Malha Fechada



Obtém-se : $\boxed{\bar{x}(k+1) = \phi\bar{x}(k) + \Gamma u(k) + L_p\left[y(k) - C\bar{x}(k)\right]}$

A equação de erro é: $\boxed{\tilde{x}(k+1) = \left[\phi - L_p C\right]\tilde{x}(k)}$

- Se a matriz do sistema for estável, $\tilde{x}$ irá convergir para zero para qualquer estado inicial $\tilde{x}(0)$, ou seja, $\tilde{x}(k)$ irá convergir para x(k).

- numa implementação real, $\tilde{x}(k)$ não será igual a x(k) porque:

  - o modelo não é perfeito
  - existem perturbações não modeladas
  - existem erros e ruído sensorial

- consegue-se manter, no entanto, um erro bastante pequeno para uma dinâmica de $\lfloor \phi - L_p C \rfloor$ rápida

- o ganho de realimentação Lp é obtido seguindo a mesma abordagem utilizada na lei de controlo

Fórmula de Ackermann (adaptada ao estimador)

$$L_p = \alpha_e(\phi) \begin{bmatrix} C \\ C\phi \\ C\phi^2 \\ \vdots \\ C\phi^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha_e(\phi) = \phi^n + \alpha_1 \phi^{n-1} + \alpha_1 \phi^{n-2} + ... + \alpha_n I$

α_i são os coeficientes da eq. característica desejada

$z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0$

Matlab: >> `Lp=acker(PHI',C',p)'`

Observabilidade

Matriz de observabilidade $W = \begin{bmatrix} C \\ C\phi \\ C\phi^2 \\ \vdots \\ C\phi^{n-1} \end{bmatrix}$

Para que o sistema seja observável é necessário que o determinante de W seja diferente de 0.

<u>Exemplo: Controlo de orientação de um satélite</u>

$\phi = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ h=0.1

a) diga se o sistema é observável

b) Obtenha Lp de forma aos pólos estarem localizados em $z = 0.4 \pm 0.4j$

Estimador Corrente

- vimos atrás que o estimador predictor estima após ter recebido medidas até y(k-1): $\bar{x}(k+1) = \phi\bar{x}(k) + \Gamma u(k) + L_p\left[y(k) - C\bar{x}(k)\right]$

- neste caso a acção de comando não depende do valor mais actual de comando

- faz sentido construir um estimador $\hat{x}$ que fornece uma estimativa baseada na medida actual

Pegando na expressão do estimador predictor e modificando-a

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + L_c\left[y(k) - C\bar{x}(k)\right]$$

com $$\bar{x}(k) = \phi\hat{x}(k-1) + \Gamma u(k-1)$$

ou seja,

$$\boxed{\hat{x}(k) = \phi\hat{x}(k-1) + \Gamma u(k-1) + L_c\left[y(k) - C\left(\phi\hat{x}(k-1) + \Gamma u(k-1)\right)\right]}$$

- o controlo baseado nesta estimativa não pode ser implementado exactamente porque é impossível amostrar, realizar cálculos e obter a saída, sem que não tenha decorrido nenhum tempo.

- o erro de estimação, ou seja a diferença entre a eq. de estado do processo e a eq. de estado do estimador é

$$\boxed{\tilde{x}(k+1) = \left[\phi - L_c C\phi\right]\tilde{x}(k)}$$

Da mesma forma, os ganhos do regulador são obtidos a partir da fórmula de Ackermann

$$L_c = \alpha_e(\phi)\begin{bmatrix} C\phi \\ C\phi^2 \\ C\phi^3 \\ \vdots \\ C\phi^n \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha_e(\phi) = \phi^n + \alpha_1\phi^{n-1} + \alpha_1\phi^{n-2} + ... + \alpha_n I$

α_i são os coeficientes da eq. característica desejada

$z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0$

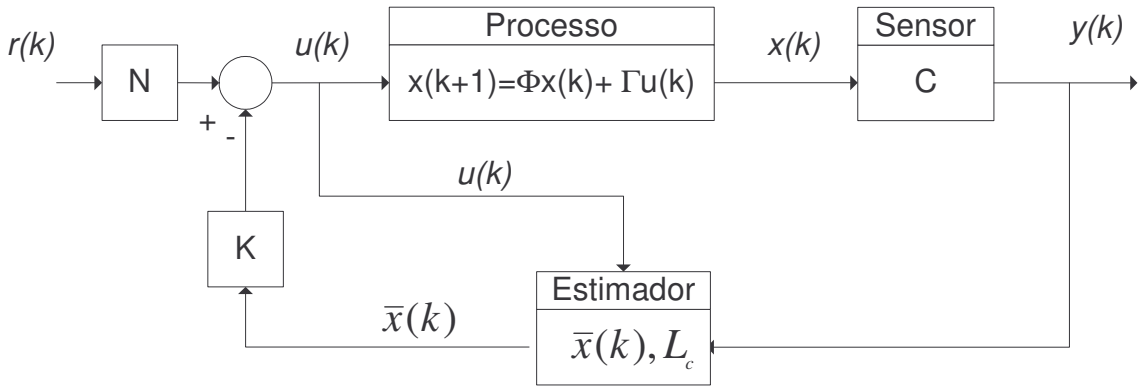
Matlab: >> `Lc=acker(PHI',PHI'C',p)'`

Relação entre os ganhos do estimador predictor e do estimador corrente $L_c = \phi^{-1} L_p$

Escolha do predictor:

- normalmente escolhe-se o estimador corrente, pois responde mais rapidamente a perturbações e erros de medida
- no est. Corrente existe um tempo de computação que não é tido em conta
- se os tempos de computação forem grandes deve-se utilizar o estimador predictor

Estrutura completa do regulador com estimador



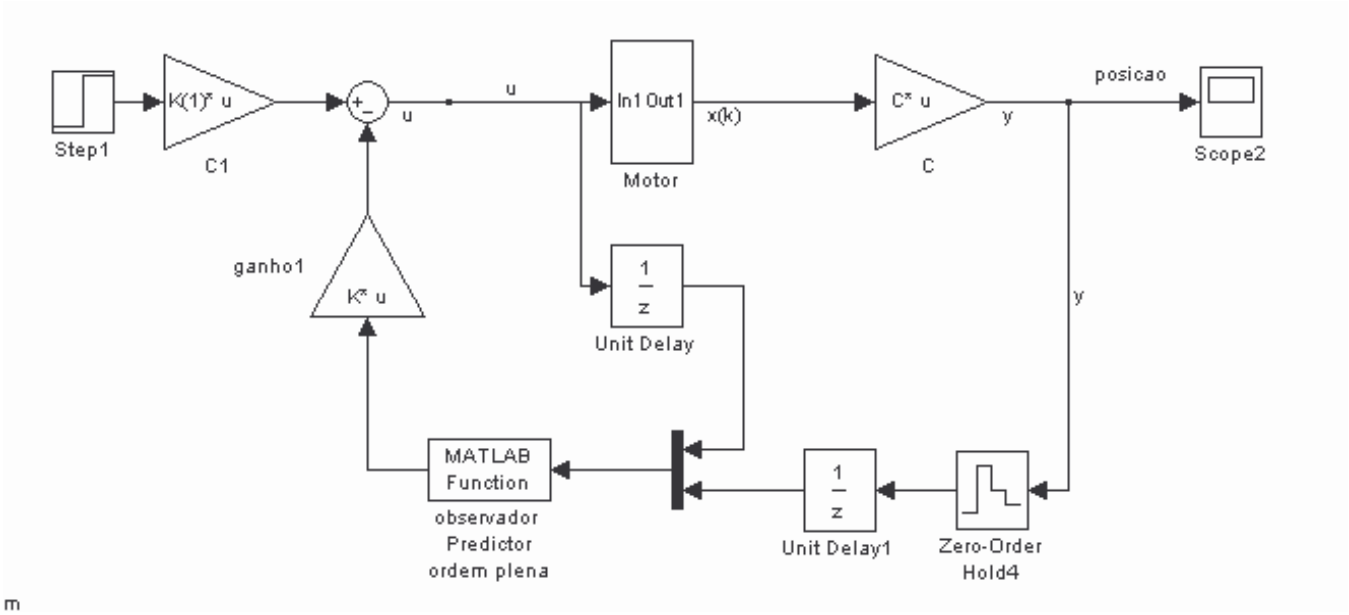
Escolha dos pólos:

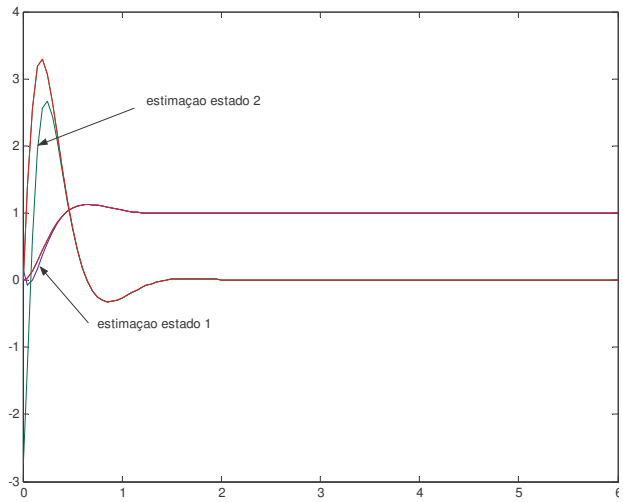
- os pólos do controlador devem ser escolhidos de forma a satisfazer simultaneamente as <u>especificações de projecto</u> e os <u>limites do actuador</u>

- os pólos do estimador são normalmente escolhidos de forma a serem <u>2 a 4 vezes mais rápidos</u> que os pólos do controlador (sendo a resposta dominada pelos pólos mais lentos)

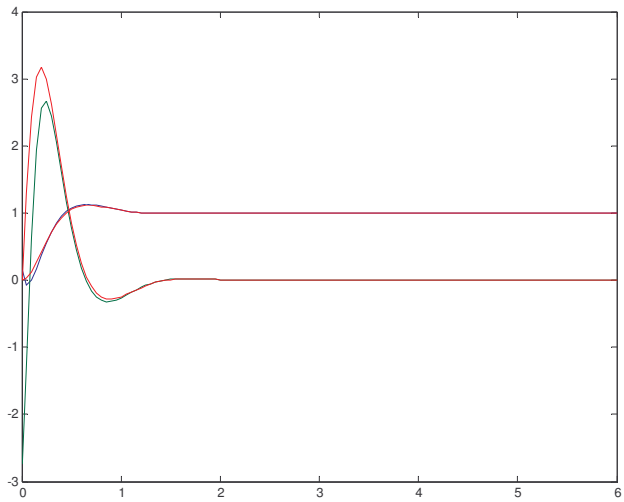
- pólos mais rápidos do estimador não têm qualquer implicação no actuador, pois o efeito é apenas sentido no computador. No entanto, pólos mais rápidos podem tornar a estimação muito sensível ao ruído.

Implementação em ambiente Simulink

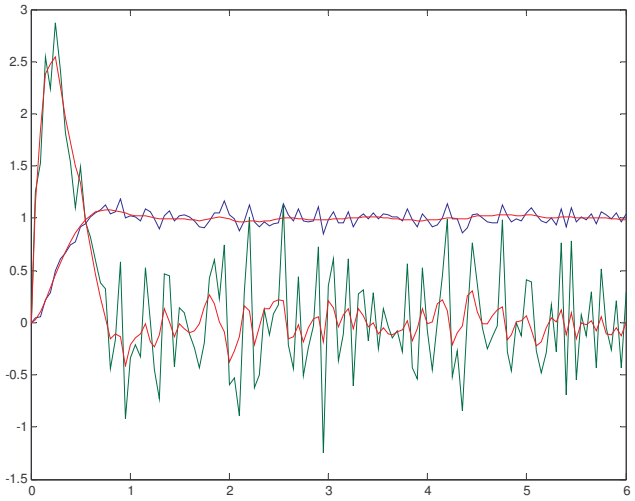




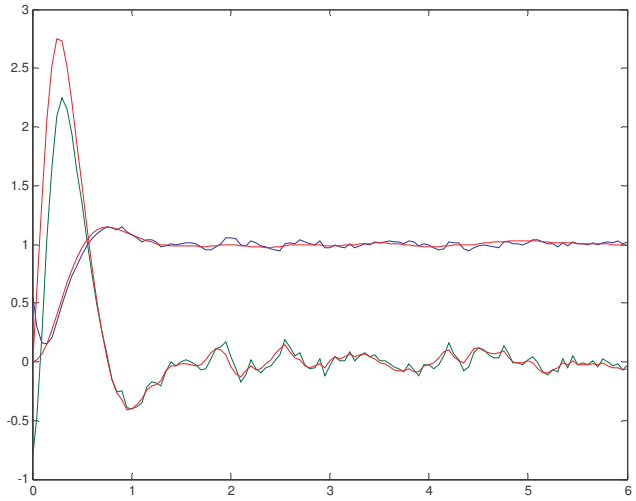
Estimador predictor



Estimador corrente

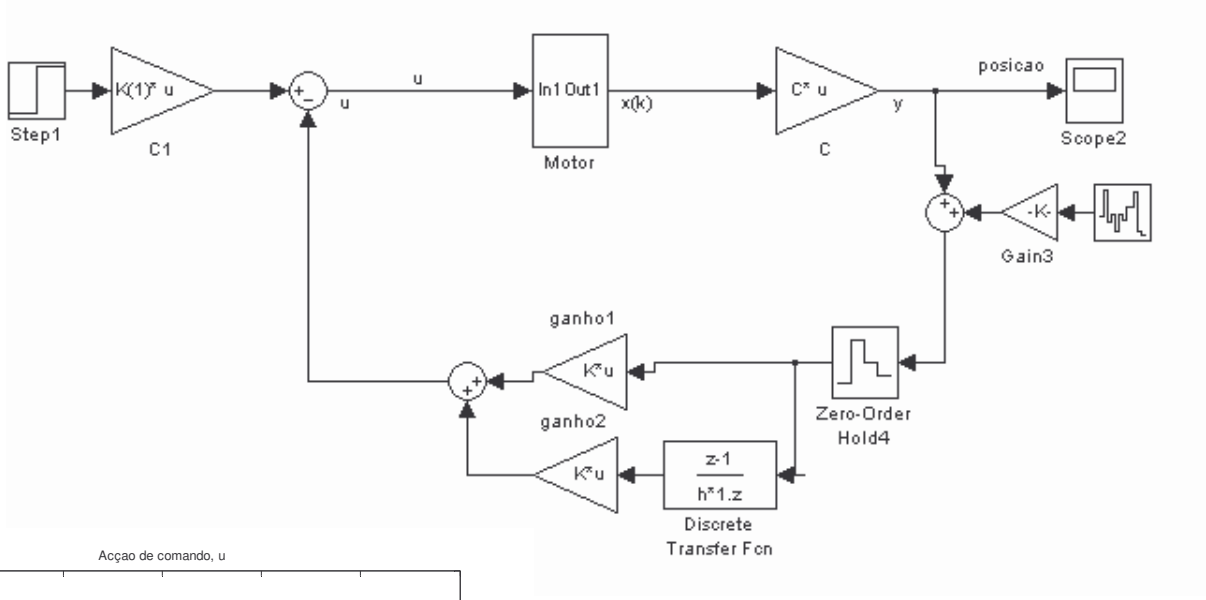


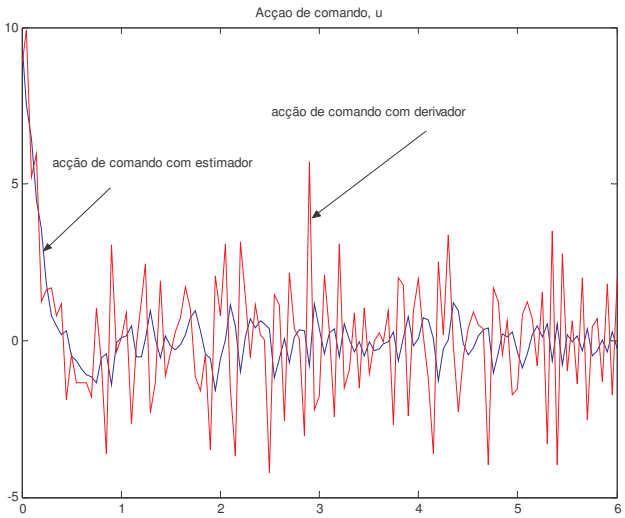
pólos do estimador afastados 8x



pólos do estimador afastados 2x

Utilização de um derivador





Acção de comando com utilização de um derivador vs. estimador corrente

Estimadores de ordem reduzida

- os estimadores discutidos até agora reconstroem todo o vector de estado
- não é necessário estimar todos os estados, no entanto quando existe ruído nas medidas, o estimador de ordem plena fornece suavidade nas medidas
- no caso de um estimador de ordem reduzida divide-se o vector de estado em duas partes:
- x_a – parte directamente medida (y)
- x_b – parte a ser estimada

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ x_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{aa} & \phi_{ab} \\ \phi_{ba} & \phi_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ x_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_b \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ x_b(k) \end{bmatrix}$$

As equações de estado que descrevem a dinâmica dos elementos não medidos é dada por:

$$x_b(k+1) = \phi_{bb} x_b(k) + \underbrace{\phi_{ba} x_a(k) + \Gamma_b u(k)}_{\text{"entrada" conhecida}}$$

a outra equação

$$\underbrace{x_a(k+1) - \phi_{aa} x_a(k) - \Gamma_a u(k)}_{\text{"medidas" conhecidas}} = \phi_{ab} x_b(k)$$

Comparando à eq. de estado genérica

$$x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

obtemos as seguintes igualdades:

$$x \leftarrow x_b$$

$$\phi \leftarrow \phi_{bb}$$

$$\Gamma u(k) \leftarrow \phi_{ba} x_a(k) + \Gamma_b u(k)$$

$$y(k) \leftarrow x_a(k+1) - \phi_{aa} x_a(k) - \Gamma_a u(k)$$

$$C \leftarrow \phi_{ab}$$

Substituindo as matrizes na eq. de estado do estimador predictor

Obtém-se : $\boxed{\begin{aligned}\bar{x}(k+1) = \phi_{bb}\bar{x}_b(k) + \phi_{ba} x_a(k) + \Gamma_b u(k) + \\ + L_r\left[x_a(k+1) - \phi_{ba} x_a(k) - \Gamma_a u(k) - \phi_{ab}\bar{x}_b(k)\right]\end{aligned}}$

A equação de erro é: $\boxed{\tilde{x}_b(k+1) = \left[\phi_{bb} - L_r \phi_{ab}\right]\tilde{x}_b(k)}$

Da mesma forma, os ganhos do regulador são obtidos a partir da fórmula de Ackermann,

Lr é seleccionado para ter as raízes de:

$$\left|zI - \phi_{bb} + L_r \phi_{ab}\right| = 0 = \alpha_e(\phi_{bb})$$

$$L_r = \alpha_e(\phi_{bb}) \begin{bmatrix} \phi_{ab} \\ \phi_{ab}\phi_{bb} \\ \phi_{ab}\phi_{bb}^2 \\ \vdots \\ \phi_{ab}\phi_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha_e(\phi) = \phi^n + \alpha_1\phi^{n-1} + \alpha_1\phi^{n-2} + ... + \alpha_n I$

α_i são os coeficientes da eq. característica desejada

$z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0$

ATRASOS (modelação na F.T. e em espaço de estados)

- considere-se a F.T. de um sistema contínuo com atraso precedido por um ZOH. O atraso pode ser proveniente de:
    - atraso entre o processo e o actuador (e.g. transporte de fluidos num processo químico, backlash numa engrenagem, etc.)
    - atraso nos sensores
    - atraso na computação e aquisição de sinal

Suponha-se um processo

$$G(s) = e^{-\lambda s} H(s)$$

λ - atraso em segundos (proveniente do atraso de processo e do tempo de computação)

$$H(s) = \frac{a}{s+a}$$

Consideremos genericamente: $\lambda = lh - mh$

h – período de amostragem

l – inteiro

$m < 1$ real

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Para

a=1

h=1

$$G(z) = \frac{z+0.6025}{z^2(z-0.3679)} \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Modelo em espaço de estados

Ver [Nunes – acetatos, pg 142]

Exercício: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8}{s(s+8)} e^{-0.01s}$

[Nunes, livro de exercícios, ex. 6.3]

a) obtenha o modelo em espaço de estados (x1=y; x2=dx1)
b) Modelo em espaço de estado discreto equivalente para h=0.025.

Projecto de controladores para sistemas com atraso

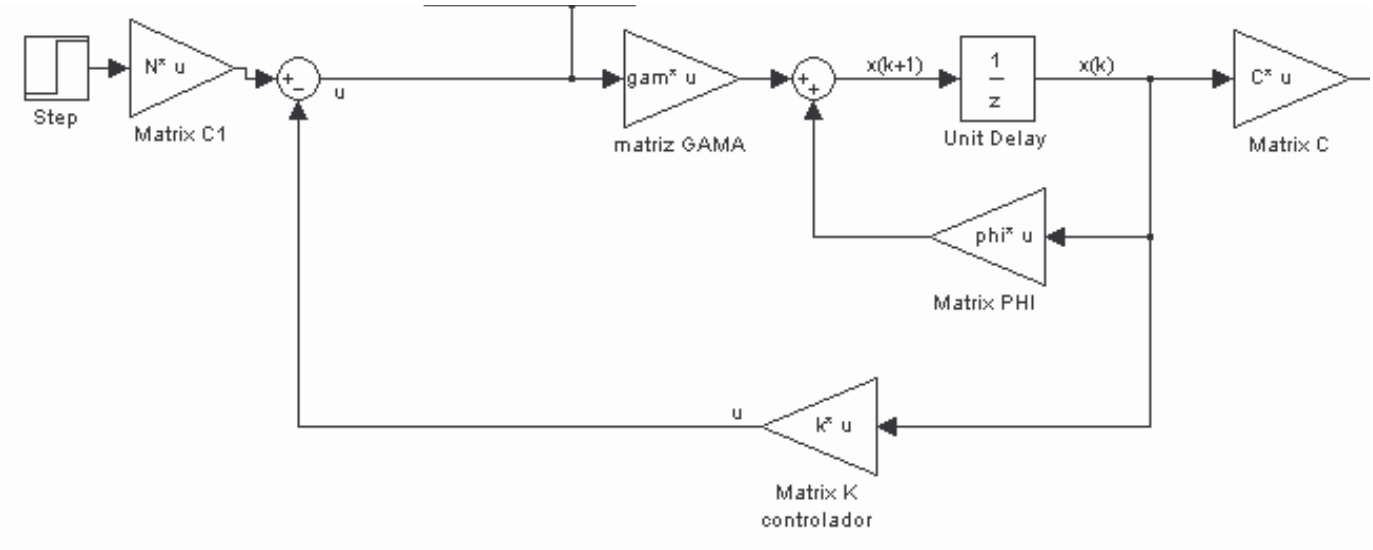
Exemplo: Controlo em velocidade de um sistema cujo modelo em espaço de estados é dado por:

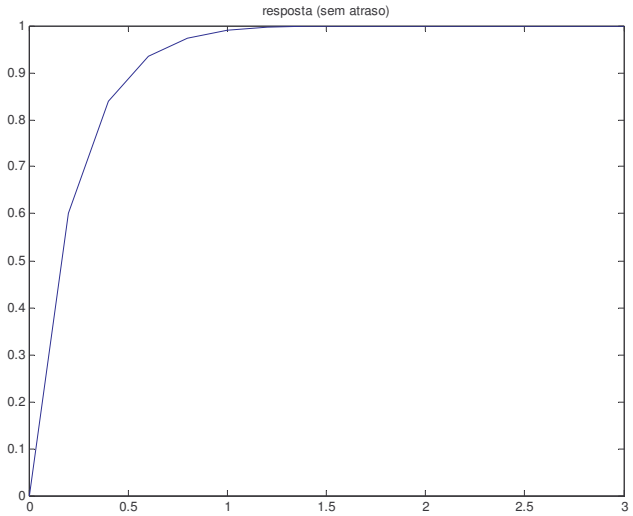
A=-0.3; B=0.3; C=1; D=0;

h=0.2 seg

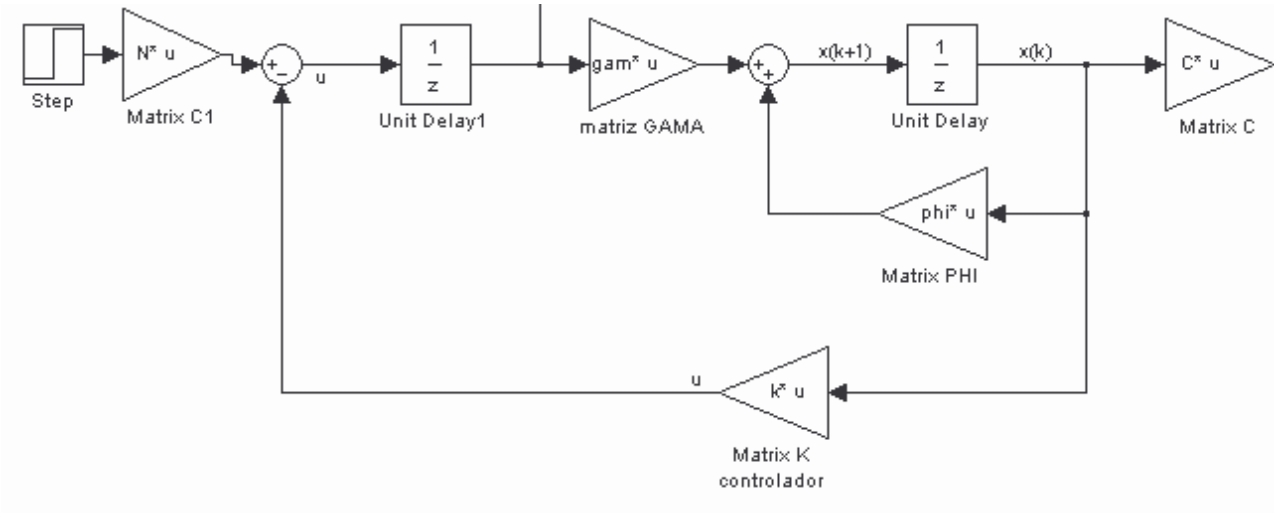
a) Obtenha o equivalente discreto no espaço de estados.
b) Obtenha o ganho do controlador de realimentação de estados (controlador tal que os pólos estejam em z=0.4).
c) Obtenha o equivalente discreto no espaço de estados assumindo um atraso de 1 amostra.
d) Obtenha o ganho do controlador de realimentação de estados (coloque o 2º pólo em z=0).
e) Obtenha o ganho do estimador predictor (pólo localizado em z=0.2). Coloque o 2º pólo em z=0.

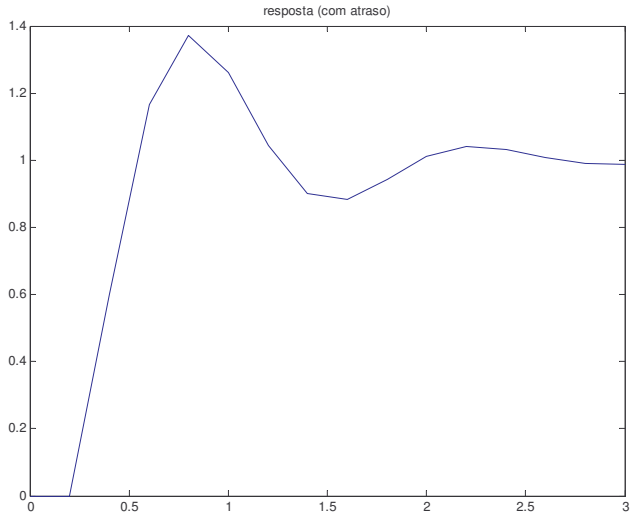
Sistema sem atraso



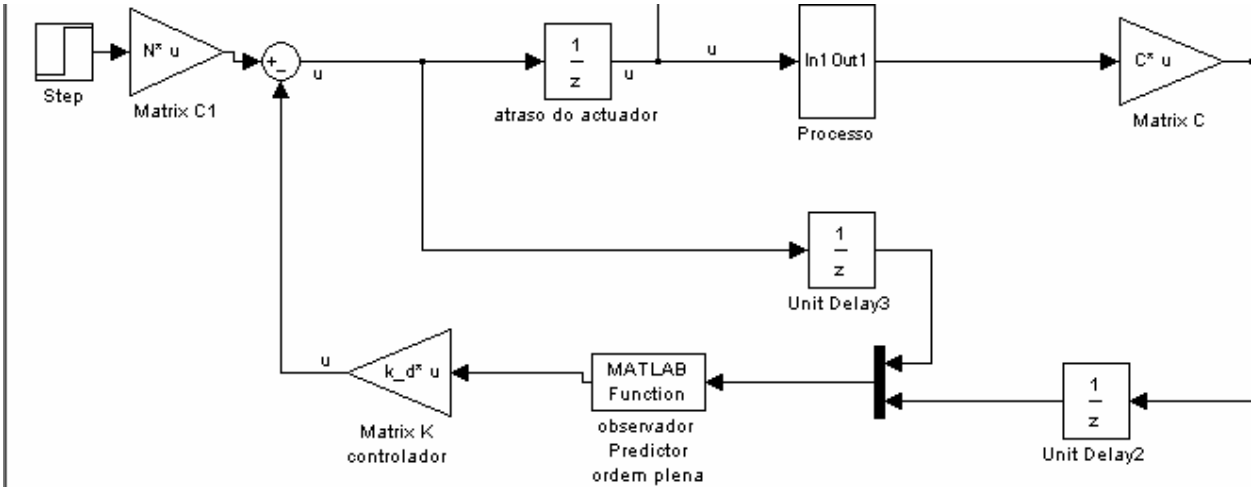


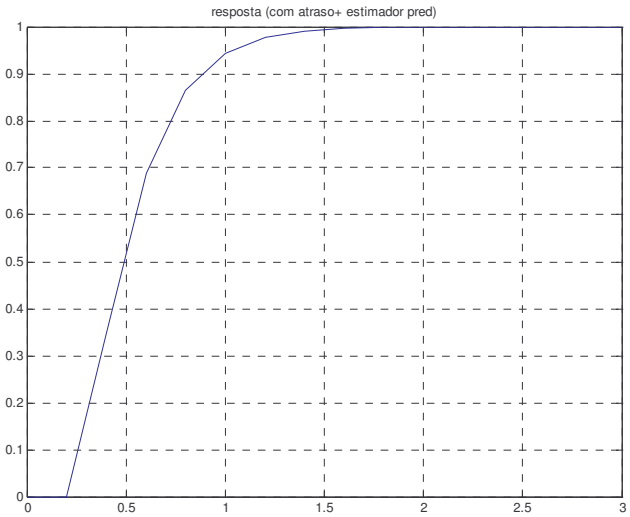
Sistema com atraso de 1 amostra no actuador



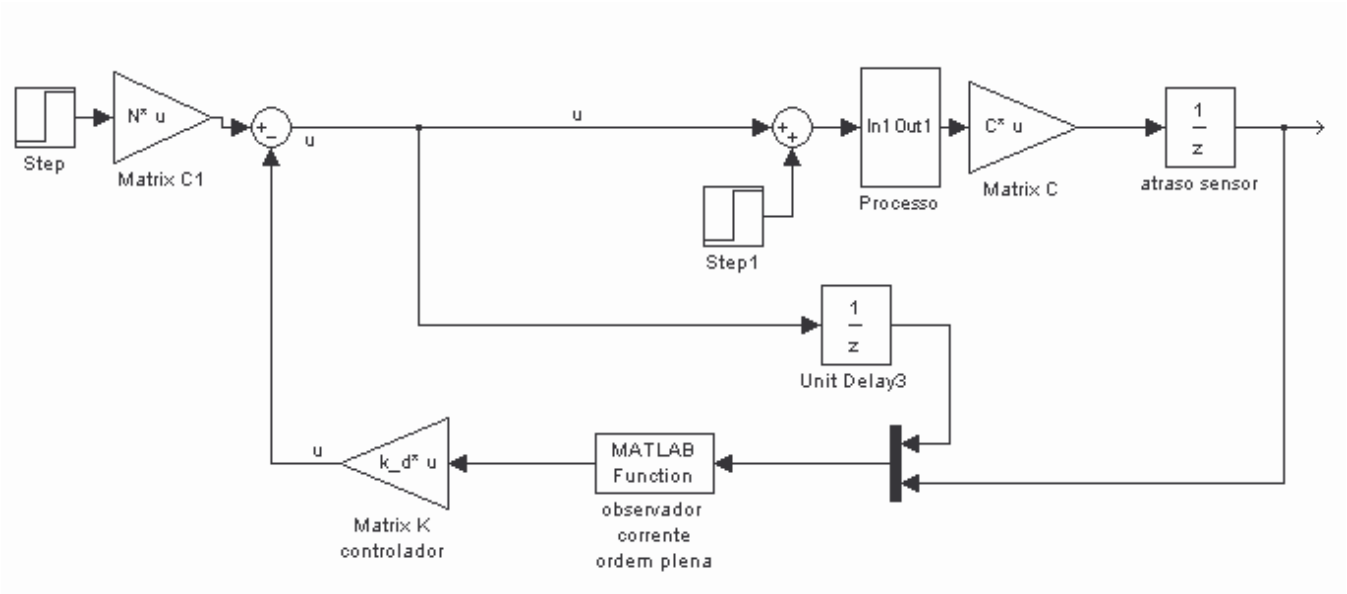


Sistema com atraso de 1 amostra utilizando estimador predictor





Modelo de espaço de estados para sistemas com atraso nos sensores



A saída com um atraso é dada por:

$$y_{1d}(k+1) = y(k) \qquad (\, y_{1d} \text{ é a versão atrasada de } y)$$

Se tivermos 2 atrasos, então:

$$y_{2d}(k+1) = y_{1d}(k)$$

Para um sistema: $x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k)$

$$y(k) = Cx(k)$$

O modelo para 2 atrasos é dado por:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y_{1d}(k+1) \\ y_{2d}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ y_{1d}(k) \\ y_{2d}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y_d(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ y_{1d}(k) \\ y_{2d}(k) \end{bmatrix}$$