Selecção de exercícios para as aulas práticas de

Controlo Digital

Fontes bibliográficas:
[Nunes] – Urbano Nunes, Controlo Digital: Exercícios resolvidos, 2003
[Franklin] – G. Franklin, J. Powell, M. Workman, "Digital Control of Dynamic Systems", 3rd Ed., Addison Wesley, 1998
[Lathi] – B. P. Lathi , Signal Processing and Linear Systems, 2000

Ficha 1 - Equações de diferença e Transformada de Z

Exercícios retirados de: Lathi,

1. Dada a equação de diferença:
   $y[k] - 0.5y[k-1] = f[k]$
   em que a entrada é $f[k] = k^2 \quad k \geq 0$
   e condição inicial $y[-1] = 16$
   Obtenha os valores de y[k] para k<4

2. Implemente em Matlab a equação de diferença da questão anterior.

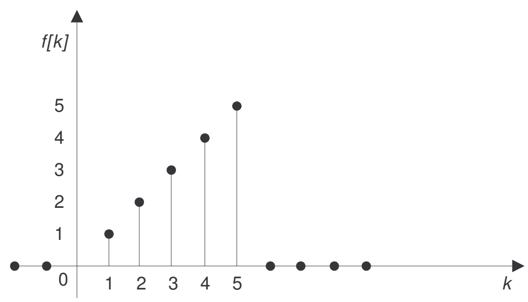
3. Encontre a transformada de Z pela definição e a região de convergência (ROC) para o sinal:
   $$\gamma^k u[k]$$

4. Encontre a transformada de Z pela definição de:
   a. $\delta[k]$
   b. $u[k]$

5. Utilizando as tabelas com os pares de transformada, obtenha a transformada inversa de Z de:
   a. $F(z) = \dfrac{8z-19}{(z-2)(z-3)}$
   b. $F(z) = \dfrac{z(2z^2-11z+12)}{(z-1)(z-2)^3}$

6. Resolva a questão anterior alínea a) com ajuda do Matlab (utilize o comando “residue”)

7. Utilizando as tabelas com os pares e propriedades da transformada de Z, encontre a transformada de Z do sinal f[k]



8. Dada a seguinte equação de diferença, obtenha a F.T. $\dfrac{Y(z)}{F(z)}$

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=3f[k-1]+5f[k-2]$$

9. Diga se o sistema $F(z)=\dfrac{3z+5}{z^2-5z+6}$ é estável. Justifique.

10. Utilize o Matlab para observar a resposta a degrau do sistema $F(z)=\dfrac{3z+5}{z^2-5z+6}$ (h – período de amostragem).

```
>> sys=tf(num,den, h)
>> step(sys)
```

Ficha 2 - Equivalentes discretos e métodos de aproximação numérica

Exercícios retirados de [Franklin] e [Nunes]

1. Obtenha a o equivalente discreto de $G(s) = \frac{a}{s+a}$ precedido por um zero-order-hold (ZOH).

2. Obtenha a o equivalente discreto de $G(s) = \frac{1}{s^2}$ precedido por um zero-order-hold (ZOH).

3. Deduza as expressões de mapeamento discreto pelos métodos de integração numérica (diferenças para trás, diferenças para frente e trapezoidal).

4. (Problema 2.13 [Nunes]) Obtenha o filtro digital equivalente $G_d(z)$ do filtro analógico descrito pela equação
$$y'' + a_1 y' + a_2 y = x'$$
utilizando o método das diferenças para trás.

5. Obtenha o equivalente discreto de $H(s) = \frac{a}{s+a}$ através do método de mapeamento pólo-zero.

6. Utilizando o Matlab, obtenha o equivalente discreto de $G(s) = \frac{1}{s+1}$ para os métodos "zoh", "foh", "tustin", "prewarp", "matched". Considere um período de amostragem h=1 seg. Compare a resposta a degrau para cada uma das aproximações.
>> sysd=c2d(sys,h,'método')

Ficha 3 - Projecto de controladores por emulação e por sintonização directa

1. Resolva o problema 2.5 do livro [Nunes].

2. (exercício 7.2 - [Franklin]) Pretende-se fazer o projecto de um controlador do servo de uma antena cuja F.T. é $G(s)=\dfrac{1}{s(10s+1)}$ (o projecto é feito por emulação, ou seja, aproximação numérica do controlador contínuo). As especificações de projecto são:
    1. Overshoot a uma entrada em degrau menor que 16%;
    2. Tempo de estabelecimento (critério de 1%) menor que 10 seg;
    3. Erro de posição a uma entrada em rampa de declive 0.01 rad/seg inferior a 0.01 rad
    4. tempo de amostragem de forma a ter pelo menos 10 amostras no tempo de subida

    a) Atendendo às especificações 1 e 2, desenhe a região do plano complexo *s* onde devem estar localizados os pólos.
    b) Atendendo à especificação 3 e que o controlador utilizado é da forma $C(s)=K\dfrac{10s+1}{s+1}$, obtenha o valo de K.
    c) Atendendo à especificação 4 obtenha o período de amostragem.
    d) Obtenha a F.T. do equivalente discreto utilizando o método de aproximação de mapeamento pólo-zero.
    e) Obtenha a equação de diferença a colocar no controlador.
    f) Obtenha o equivalente discreto de G(s) precedido por m ZOH.
    g) Obtenha a F.T. Y(z)/R(z) em Matlab e observe a resposta a degrau.

3. Resolva o exercício 3.3 do livro [Nunes]

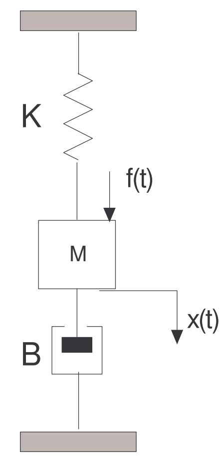
Ficha 4 - Estabilidade (critério de Jury) e Lugar das raízes

1. Resolução do exemplo 2 de [Nunes, pag. 101]

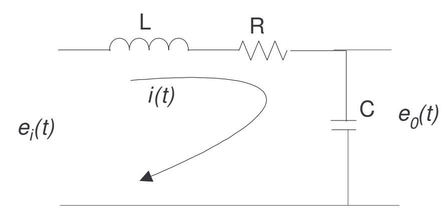
2. Resolução do exemplo [Nunes, pag. 103]

Ficha 5 – Modelação no espaço de estado contínuo, controlabilidade e observabilidade

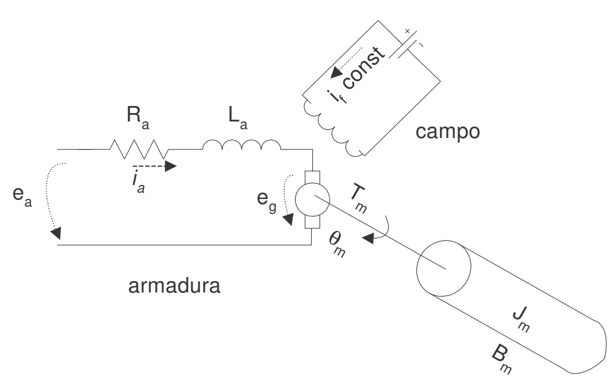
1. Para o sistema mecânico:
   a) Obtenha o modelo em espaço de estados.
   b) Obtenha o diagrama de blocos correspondente.



2. Dado o circuito eléctrico da figura obtenha o modelo em espaço de estados, considerando
   a) Variáveis de estado a tensão e variação de tensão de saída.
   b) Variáveis de estado: tensão de saída e corrente.



3. Obtenha o modelo em espaço de estados do motor DC controlado por tensão de armadura considerando:
   a) Variáveis de estado: velocidade e posição do veio do motor e corrente de armadura.
   b) Variáveis de estado: velocidade do veio motor e corrente.
   c) Variáveis de estado: velocidade e posição do veio do motor.



4. Obtenha a matriz de transição de estados do seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

5. Para o sistema anterior determine a resposta a degrau unitário

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

u(t)=1, t>0.

6. Obtenha a F.T. do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

7. Obtenha a representação no espaço de estados sob a forma controlável, observável e diagonal do sistema dado por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2}$$

8. Obtenha a representação em espaço de estados do sistema anterior usando o Matlab.
>> [A,B,C,D]=tf2ss(num,den)

9. Obtenha os valores próprios do sistema $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2}$

.

10. Diga se o sistema seguinte é de estados completamente controláveis:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

11. Comente a observabilidade do sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

12. Resolva o problema 5.1 [Nunes].

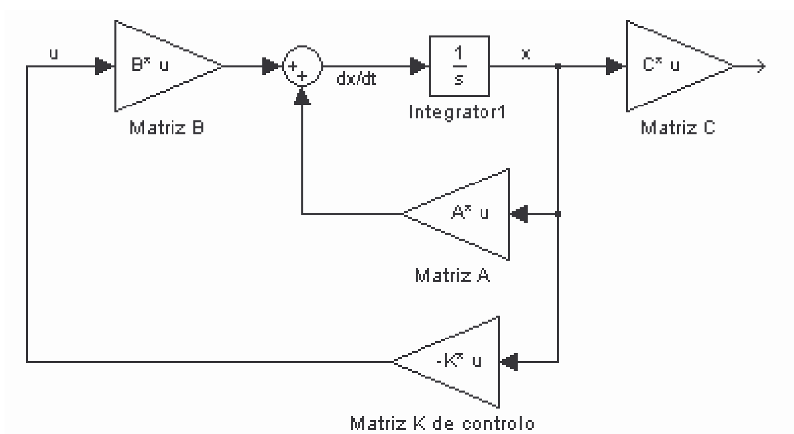
Ficha 6 – Controlo por realimentação das variáveis de estado: colocação de pólos

1. Considere o sistema definido por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \qquad \text{e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Deseja-se através do controlo de realimentação de estado u=-Kx, ter pólos em malha fechada em $s = -2 \pm j4$ e $s = -10$. Determine a matriz de ganho de realimentação K, através de

a) Método de colocação de pólos.

b) Método de colocação de pólos simplificado (geralmente utilizado para n<4).

c) Colocação de pólos pela fórmula de Ackermann.

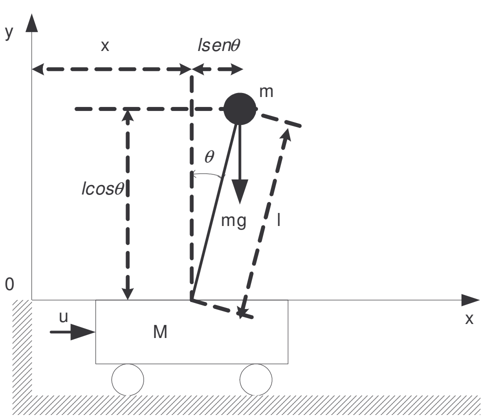
d) Utilize no Matlab o comando *place* e *acker* para obter a matriz de realimentação K.

2. Pretende-se controlar um sistema composto por um pêndulo invertido montado num carrinho que pode ter deslocamentos lineares.
   O objectivo consiste em manter o pêndulo na posição vertical e o carrinho na posição de referência x=0, quando sujeitos a perturbações (no pêndulo ou no carrinho).
   Projecte o controlador de forma que, quando sujeito a perturbações, o pêndulo possa ser trazido de volta à posição vertical e o carrinho à posição de referência (regulação) com um tempo de estabelecimento de 2 seg. e com amortecimento de ξ=0.5.
   As equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico do sistema são:

$$\begin{cases} Ml\ddot{\theta} = (M+m)g\theta - u \\ M\ddot{x} = u - mg\theta \end{cases}$$

   Com M=2Kg;   m=0.1 Kg;   l=0.5m;   g=9.81 m/s^2;
   As variáveis de saída são:
   θ - posição angular do pêndulo
   x – posição linear do carrinho

   entrada: u



a) Obtenha o modelo do sistema no espaço de estados.

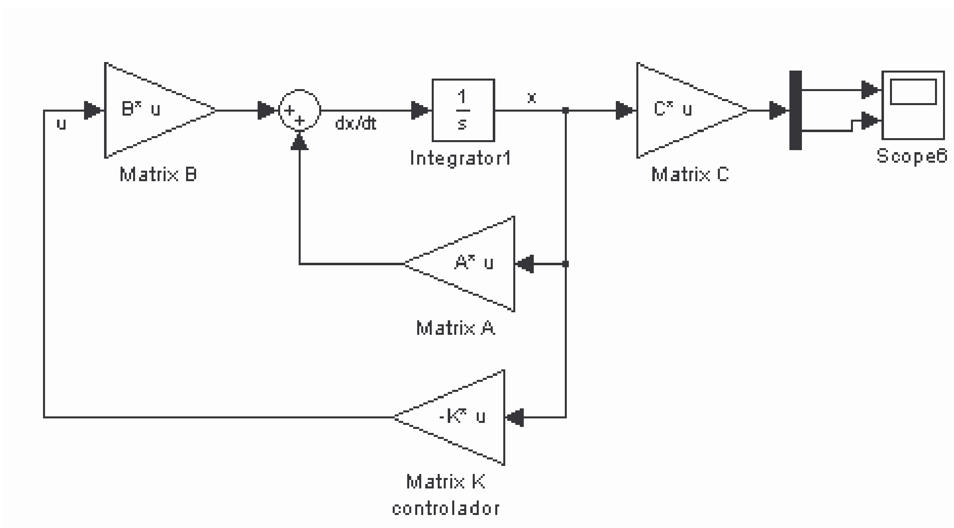
b) Obtenha com ajuda do Matlab a matriz de realimentação de estados K e observe a resposta a condições iniciais não nulas (θ=*0.1*) (codigo1).

c) Implemente o sistema no Simulink (Fig.1). Inclua de alguma forma uma perturbação e visualize a saída.

Código 1: controlo do pêndulo em Matlab

```
% CONTROLO DO PENDULO INVERTIDO SOBRE UM CARRINHO

%modelo do pendulo
M=2;
m=0.1;
g=9.81;
l=0.5;
A=[0 1 0 0;(M+m)*g/(M*l) 0 0 0;0 0 0 1;-m*g/M 0 0 0];
B=[0 -1/(M*l) 0 1/M]';
C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
D=[0 0]';

%matriz de controlabilidade
M=[B A*B A^2*B A^3*B]
%teste de controlabilidade (duas formas)
rank(M)
det(M)

%coeficientes do polinomio caracteristico de A |sI-A|
coef_A=poly(A)

%polinomio caracteristico desejado
%pretende-se zeta=0.5 e Ts=2 seg (Ts=4/(zeta*wn))
zeta=0.5
wn=2/zeta

p1=-zeta*wn-wn*sqrt(zeta^2-1)
p2=-zeta*wn+wn*sqrt(zeta^2-1)
p3=-5*zeta*wn
p4=-5*zeta*wn

%matriz na forma diagonal
MF=[p1 0 0 0;0 p2 0 0;0 0 p3 0;0 0 0 p4]
coef_MF=poly(MF)

%Determinar a matriz de transformaçao T
W=[coef_A(4) coef_A(3) coef_A(2) coef_A(1);
   coef_A(3) coef_A(2) coef_A(1) 0;
   coef_A(2) coef_A(1) 0 0;
   1 0 0 0]
T=M*W

K=[coef_MF(5)-coef_A(5) coef_MF(4)-coef_A(4) coef_MF(3)-coef_A(3)
coef_MF(2)-coef_A(2)]*inv(T)
```

```
%utilizando o comando acker (formula de ackerman)
K=acker(A,B,[p1 p2 p3 p4])

%RESPOSTA do sistema a condicoes iniciais nao nulas

%sistema com o ganho de realimentaçao
AA=A-B*K
B=[0 0 0 0]'

%condicoes iniciais desvio de teta =0.1
BB=[0.1 0 0 0]';
T=0:0.01:3;
[y x t]=initial(AA,B,C,D,BB,T);
subplot(2,2,1);
plot(t,x(:,1));grid
title('posicao angular,teta')
xlabel('tempo,seg')
subplot(2,2,2);
plot(t,x(:,2));grid
title('velocidade angular,w')
xlabel('tempo,seg')
subplot(2,2,3);
plot(t,x(:,3));grid
title('posicao linear,x')
xlabel('tempo,seg')
subplot(2,2,4);
plot(t,x(:,4));grid
title('velocidade linear,v')
xlabel('tempo,seg')
```



(Fig.1: Controlo do pêndulo - implementação em Simulink)

3. Projecte o controlador de realimentação de estados para o pêndulo rotacional existente no laboratório. Siga as especificações de projecto fornecidas pelo Professor.

4. Considere-se o projecto de um servo-mecanismo do tipo 1, ou seja, quando a F.T. do processo a controlar possui um integrador. Seja a F.T. dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Deseja-se projectar um controlador tal que os pólos em malha fechada estejam localizados em: $-2 \pm j2\sqrt{3}$ e -10. A entrada de referência é uma função degrau.

a) Obtenha o modelo no espaço de estados na forma controlável.
b) Obtenha a matriz de controlo no Matlab, implemente no Simulink e visualize a saída.

Ficha 7 – Discretização em espaço de estados, Controlo por realimentação das variáveis de estado em discreto

1. Resolva o problema 6.2 [Nunes].

2. Resolva o problema 6.3 [Nunes].

3. Resolva o problema 7.2 [Nunes].

Ficha 8 – Projecto de estimadores

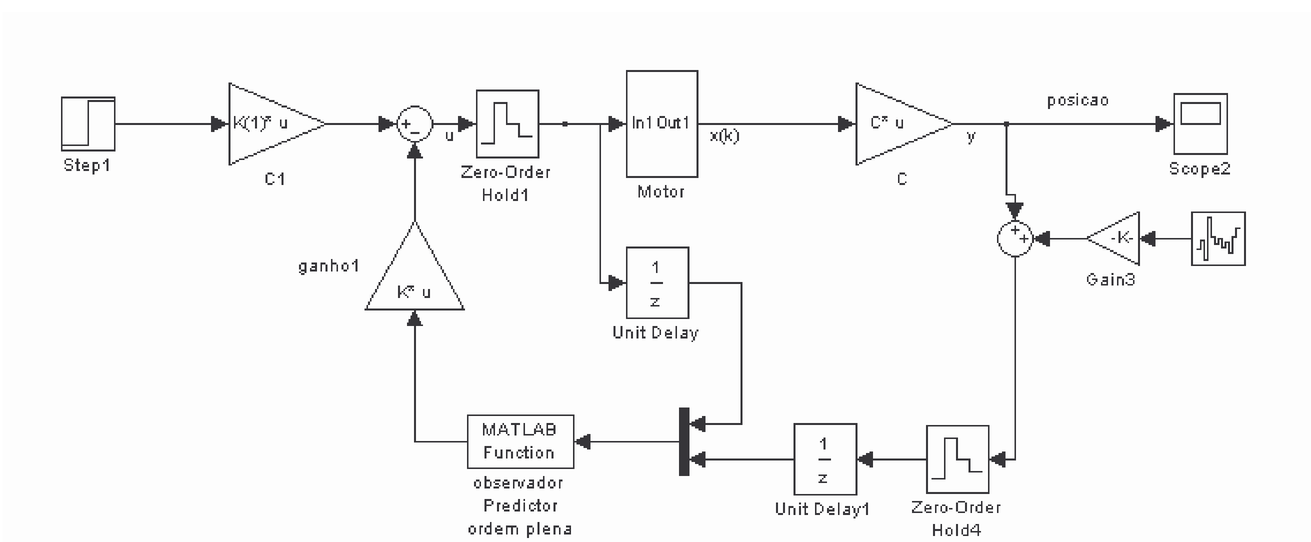
1. Pretende-se controlar um motor em posição. Projecte em Matlab os ganhos do controlador e de um estimador predictor de ordem plena em discreto (h=0.05 seg.). Implemente em Simulink o controlador e o estimador. As especificações de projecto são:

$$\xi = 0.7$$
$$w_n = 5\ rad / s$$

O modelo contínuo do motor em espaço de estados é dado por:

A=[0 1;0 -3.7] B=[0 2.67]'

C=[1 0] D=0



O observador (estimador)

$$\boxed{\bar{x}(k+1) = \phi\bar{x}(k) + \Gamma u(k) + L_p\left[y(k) - C\bar{x}(k)\right]}$$

é implementado numa função de Matlab

:

```
function estim=obs_pred(in)
global PHI GAMMA C x_ob Lp;
uk=in(1);     %valor de comando anterior u[k-1]
yk=in(2);     %saida real medida y[k-1] - neste caso posiçao


x_ob=PHI*x_ob + GAMMA*uk + Lp*(yk-C*x_ob);
estim=x_ob;
```

2. Repita a questão anterior, implementando um estimador corrente de ordem plena:

$$\boxed{\hat{x}(k) = \phi\hat{x}(k-1) + \Gamma u(k-1) + L_c\left[y(k) - C\left(\phi\hat{x}(k-1) + \Gamma u(k-1)\right)\right]}$$