INSTITUTO POLITÉCNICO DE TOMAR

Engenharia Electrotécnica

2º Trabalho Prático de Controlo Inteligente
Controlo do Sistema Pêndulo Invertido
GUI – Graphic User Interface

Sistema Pêndulo Invertido

Características do Sistema

O sistema consiste num carro com um pêndulo invertido que é "empurrado" por uma força F. Determinando as equações de movimento que definem o sistema e linearizando-as em função de $\theta = \pi$, é possível definir a função de transferência do sistema.

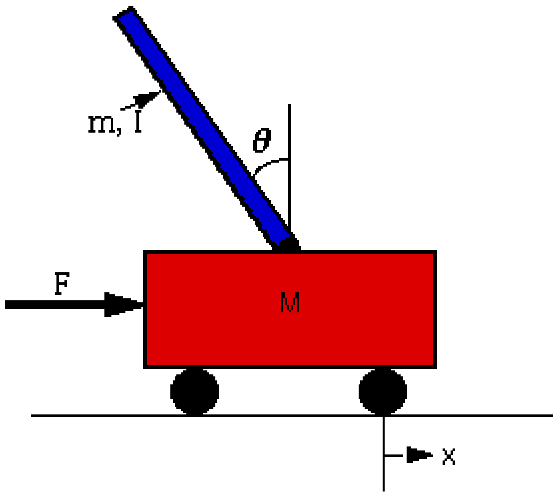

Figura 1: Sistema Pêndulo Invertido

Considere inicialmente os seguintes dados do sistema:

Símbolo	Descrição	Valor (em unidades SI)
M	Massa do carro	0.5 kg
m	Massa do pêndulo	0.5 m
b	Fricção do carro	0.1 N/m/s
l	Comprimento do pêndulo	0.3 m
I	Inércia do pêndulo	1.0 m
F	Força aplicada ao carro	0.006 kgm^2
x	Coordenada da posição do carro	m
θ	Ângulo do pêndulo em relação à vertical	rad

Tabela 1: Constantes e variáveis do sistema

Considerando que a saída que se pretende analisar do sistema consiste no ângulo de desvio ϕ em relação à vertical, de modo a que $\theta = \pi + \phi$ e que a entrada u representa a força com que se empurra o carro com o pêndulo invertido, obtém-se as seguintes equações de movimento linearizadas:

$$(I + ml^2)\phi'' - mgl\phi = mlx''$$
$$(M + m)x'' + bx' - ml\phi'' = u$$

Função de Transferência

Para se obter a função de transferência do sistema linearizado é necessário em primeiro lugar aplicar a transformada de Laplace às equações anteriores, obtendo-se as seguintes equações:

$$(I + ml^2)\Phi(s)s^2 - mgl\Phi(s) = mlX(s)s^2$$
$$(M + m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\Phi(s)s^2 = U(s)$$

Resolvendo a primeira equação em ordem a *X(s)* e substituindo este último resultado na segunda equação, obtém-se seguinte função de transferência de 4ª ordem:

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s^2}{s^4 + \frac{b(I + ml^2)}{q}s^3 - \frac{(M + m)mgl}{q}s^2 - \frac{bmgl}{q}s}$$

Representação em Espaço de Estados do Sistema

A representação em espaço de estados do sistema é dada pelas seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} x' \\ x'' \\ \Phi' \\ \Phi'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2} & \frac{m^2gl^2}{I(M + m) + Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M + m) + Mml^2} & \frac{mgl(M + m)}{I(M + m) + Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \Phi \\ \Phi' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I + ml^2}{I(M + m) + Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M + m) + Mml^2} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \Phi \\ \Phi' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Note-se que a matriz C é uma matriz 2 por 4, uma vez que quer a posição do carro, quer a posição do pêndulo fazem parte da saída.

INSTITUTO POLITÉCNICO DE TOMAR

Engenharia Electrotécnica

Trabalho Prático

Utilizando o Matlab e o GUI realize um programa que implemente a função de transferência em malha aberta (do pêndulo invertido) e a representação em espaço de estados. O programa deve ainda apresentar a resposta a degrau do sistema em malha aberta.

O interface que deve realizar para o seu programa deve ter o aspecto seguinte: