INSTITUTO POLITÉCNICO DE TOMAR

Engenharia Electrotécnica

8ª Aula de Controlo Inteligente

Discretização de sistemas em espaço de estados

Discretização de um sistema contínuo em espaço de estados

Considere-se o seguinte sistema contínuo:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Amostragem por ZOH do sistema em espaço de estados

Realizando uma amostragem por ZOH do sistema anterior obtém-se o seguinte sistema discreto em espaço de estados:

$$x(kh+h) = \Phi x(kh) + \Gamma u(kh)$$
$$y(kh) = Cx(kh)$$

onde:

$$\Phi = e^{Ah}$$
$$\Gamma = \int_0^h e^{As} ds B$$

Amostragem de sistemas em espaço de estados com atraso (para atrasos inferiores ao tempo de amostragem)

Considere-se a seguinte equação de estado:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t-\tau)$$

Se τ for inferior ou igual ao tempo de amostragem, a equação de estado discreta ficará da forma:

$$x(kh+h) = \Phi x(kh) + \Gamma_0 u(kh) + \Gamma_1 u(kh)$$

onde

$$\Phi = e^{Ah}$$

$$\Gamma_0 = \int_0^{h-\tau} e^{As} ds B$$

$$\Gamma_1 = e^{A(h-\tau)} \int_0^{\tau} e^{As} ds B$$

Amostragem de sistemas em espaço de estados com atraso (para atrasos longos)

Se τ for superior ao tempo de amostragem, então:

$$\tau = (d-1)h + \tau' \qquad 0 < \tau' \le \tau$$

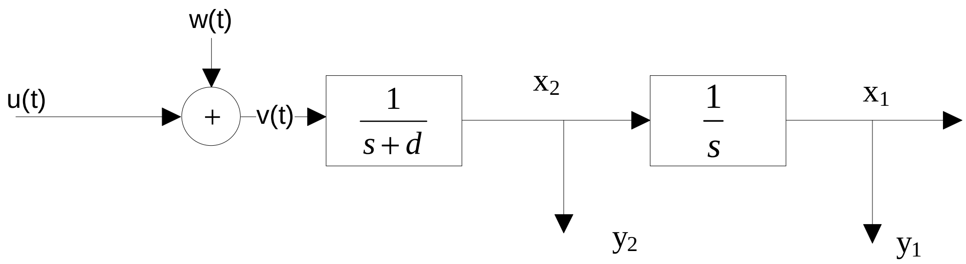
onde d é um inteiro. A equação em espaço de estados discreta representa-se da seguinte forma:

$$x(kh+h) = \Phi x(kh) + \Gamma_0 u(kh-(d-1)h) + \Gamma_1 u(kh-dh)$$

As equações para Γ_0 e Γ_1 são semelhantes à do caso anterior, no entanto τ deve ser substituído por τ'.

Exercícios

1. O diagrama de blocos da figura seguinte representa o modelo de um motor dc controlado por armadura, em que w(t) representa uma entrada de ruído (perturbação à entrada).



(d depende da fricção viscosa)

a. Determine o modelo em espaço de estados.

b. Determine o modelo em espaço de estados do sistema amostrado (período de amostragem h com zoh).

c. Determine a função de transferência discreta.

2. Discretize os seguintes sistemas:

a) $$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

b) $$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} + 3u$$

c) $$\frac{d^3 y}{dt^3} = u$$

3. Obtenha os sistemas contínuos, caso seja possível, a partir dos seguintes sistemas discretos:

a) $y(kh) - 0.5y(kh-h) = 6u(kh-h)$

b) $$x(kh+h)=\begin{bmatrix}-0.5 & 1\\ 0 & -0.3\end{bmatrix}x(kh)+\begin{bmatrix}0.5\\ 0.7\end{bmatrix}u(kh)$$
$$y(kh)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x(kh)$$

4. Considere um processo físico representado pela função de transferência:

$G(s)=2(s+3)^{-1}.e^{-\upsilon s}$ em que σ = 2.5 amostrada com um período h = 1 s.

a) Determine a equação em espaço de estados do sistema amostrado.
b) Determine a função G(z) discreta (com zoh).
c) Compare os pólos de G(s) com os de G(z).
d) Repita as alíneas anteriores considerando h = 0.5s.

5. Considere um processo físico representado pela função de transferência:

$G(s)=\frac{1}{s}e^{-st}$ em que h = 1 e τ = 0.5

e) Determine a equação em espaço de estados do sistema amostrado.
f) Determine a função G(z) discreta (com zoh).
g) Compare os pólos de G(s) com os de G(z).

6. Considere um processo físico representado pela função de transferência:

$G(s)=\frac{1}{s+1}e^{-st}$ em que h = 1 e τ = 1.5

a) Determine a equação em espaço de estados do sistema amostrado.
b) Determine a função G(z) discreta (com zoh).
c) Compare os pólos de G(s) com os de G(z).

7. Considere o seguinte sistema amostrado:

$$y(k+1)=ay(k)+b_3u(k-3)+b_4u(k-4)$$

onde o tempo de amostragem h = 1s. Demonstre que este sistema pode ser obtido por amostragem de:

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha y(t) + bu(t-\tau)$$

onde

$$\tau = 4 - \frac{1}{\ln \alpha} \ln \frac{ab_3 + b_4}{b_3 + b_4}$$