INSTITUTO POLITÉCNICO DE TOMAR

Engenharia Electrotécnica

7ª Aula de Controlo Inteligente

Espaço de estados

Representação em Espaço de Estados – Introdução

A representação em espaço de estados é baseada no desenvolvimento de um sistema de n equações diferenciais de 1ª ordem. Este tipo de representação permite o projecto de sistemas de controlo com incidência em vários tipos de desempenho. O projecto em espaço de estados têm ainda a possibilidade de ser realizado para uma classe de entradas, ao invés de uma única entrada (impulso, degrau ou sinusóide). Para além disso este tipo de representação permite ainda a inclusão de condições iniciais.

Definições

Estado – O estado de um sistema dinâmico consiste no mais pequeno conjunto de variáveis (chamadas de variáveis de estado), por forma a que o conhecimento do valor dessas variáveis em $t = t_0$ e dos valores das entradas para $t \geq t_0$ permita determinar em completo o comportamento do sistema para $t \geq t_0$.

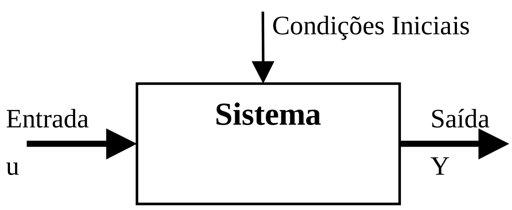
Variáveis de Estado – Representam o mais pequeno conjunto de estados que definem o sistema dinâmico. Se pelo menos n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ são necessárias para descrever completamente o comportamento do sistema dinâmico, então as n variáveis denominam-se de variáveis de estado.

É de notar que neste tipo de representação é possível incluir variáveis não mesuráveis e não observáveis.

Vector de Estado – Se são necessárias n variáveis de estado para descrever completamente o comportamento do sistema , então essas n variáveis de estado podem ser consideradas como as componentes do vector denominado de vector de estado.

Representação em Espaço de Estados

Suponha o sistema seguinte:



A figura anterior representa um sistema dinâmico com as variáveis de controlo (entrada u) accionam o sistema, que evolui a partir das condições iniciais, a fim de produzir a saída Y normalmente mensurável.

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = f\left(y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \ldots\ldots\ldots\ldots, u(t), \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{d^n u(t)}{dt}, t \right)$$

Com condições iniciais:

$$y(0) = d_0, \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = d_1, \ldots\ldots\ldots, \left.\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} = d_{n-1}$$

Normalmente, entre a saída y e a entrada u, existe uma relação funcional que se pode exprimir através de uma equação diferencial ordinária de ordem n, que de forma geral é não linear. Tal relação funcional denomina-se de modelo.

No caso da equação linear diferencial ser linear, a equação fica do seguinte modo:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$
$$b_n \frac{d^n u}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

Caso os coeficientes a_i e b_i sejam constantes, obtém-se um sistema linear e invariante ou de coeficientes constantes.

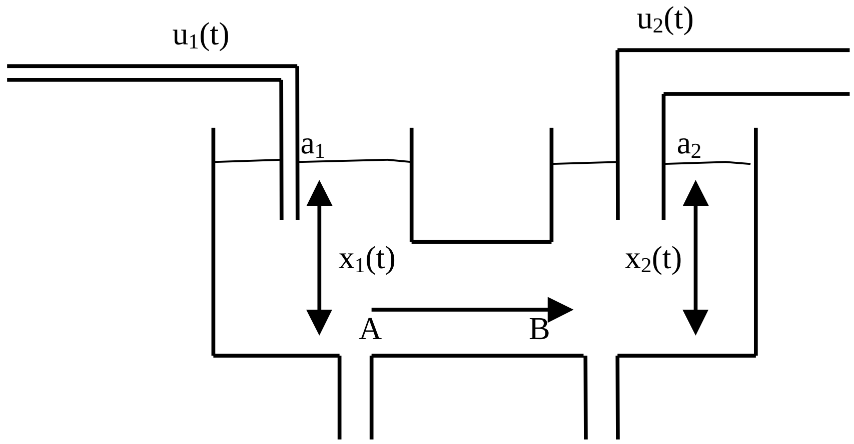
Considere-se inicialmente o caso de uma entrada u e uma saída y (sistema SISO). Aplicando a transformada de Laplace à equação anterior, obtém-se:

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 s + a_0$$
$$e$$
$$P(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + b_1 s + b_0$$

Por outro lado sabe-se que:

$$Q(s).Y(s) = P(s).U(s) \Leftrightarrow$$
$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

No caso de se estar perante um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas (sistema MIMO):



Os dois vasos têm secções a_1 e a_2 (m^2).

Sejam:

- $x_i(t)$ (m) os níveis do líquido nos respectivos vasos;
- u_i, i = 1, 2,...(m^3/s) o caudal de entrada do vaso i; e
- $d_1(t)$, $d_2(t)$ os caudais de saída (m^3/s) de cada vaso.

Os caudais de interligação supõe-se apenas função da diferença entre os níveis A e B, ou seja $f_0(x_1(t)-x_2(t))$, sendo f_0 uma função normalmente não linear.

Para o vaso 1:

A variação do volume do líquido durante um intervalo de tempo Δt (igual à secção vezes a variação do nível), é igual à soma dos volumes de líquido que nele entram menos aqueles que saem:

$$a_1 \Delta x_1 = u_1(t)\Delta t - f_0\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\Delta t - d_1(t)\Delta t$$

ou

$$a_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = u_1(t) - f_0\left(x_1(t) - x_2(t)\right) - d_1(t)$$

Se Δt tender para 0, pode-se escrever:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{a_1}\left(u_1(t) - f_0\left(x_1(t) - x_2(t)\right) - d_1(t)\right)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para o **vaso 2**:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{a_2}\left(u_2(t) - f_0\left(x_1(t) - x_2(t)\right) - d_2(t)\right)$$

Conhecendo as condições iniciais $x_1(t_0)$ e $x_2(t_0)$ (níveis iniciais) e as condições de entrada $u_1(t)$ e $u_2(t)$, $t \geq 0$, é possível calcular a evolução dos níveis $x_1(t)$ e $x_2(t)$ para $t \geq 0$, bastando para isso integrar as duas equações diferenciais. Note-se que a dinâmica entre os vasos, expressas por f_0, introduz um acoplamento entre x_1 e x_2.

A questão que se coloca a seguir é: **Que saídas é que se devem considerar?**

A resposta depende daquilo que eu pretenda controlar. Por exemplo, se pretender controlar os caudais, então:

$$y_1(t) = d_1(t) \qquad e \qquad y_2(t) = d_2(t)$$

Caso pretenda controlar os níveis, então:

$$y_1(t) = x_1(t) \qquad e \qquad y_2(t) = x_2(t)$$

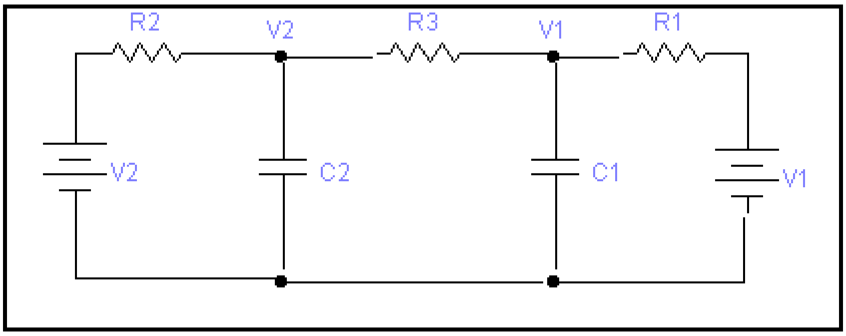
E finalmente se pretendesse controlar o volume total do líquido contido em cada vaso, a saída seria:

$$y(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \qquad ou \qquad y = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

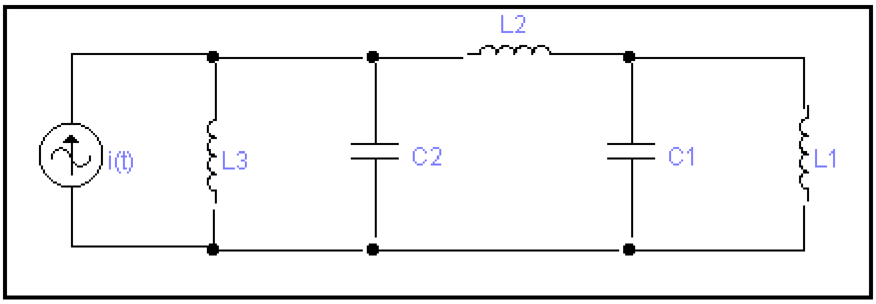
Pode-se deste modo afirmar que as saídas do sistema constituem as grandezas que pretendemos considerar.

Exemplos

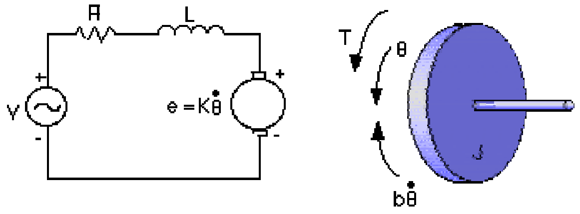
1. Faça a representação em variáveis de estado do seguinte circuito:



2. Faça a representação em variáveis de estado do seguinte circuito:



3. Faça a representação em espaço de estados do modelo do motor DC. Considere para tal as seguintes variáveis de estado: posição, velocidade e corrente de excitação.



Formas canónicas

Forma canónica controlável

Considere o seguinte sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots\dots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots\dots\dots + a_{n-1}s + a_n}$$

A representação em espaço de estados do sistema anterior na forma canónica controlável é dada do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1}'(t) \\ x_{n-2}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots\dots & 0 \\ . & . & . & \dots\dots & . \\ . & . & . & \dots\dots & . \\ . & . & . & \dots\dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots\dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1}(t) \\ x_{n-2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \dots\dots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t \\ . \\ . \\ x_n(t \end{bmatrix} + b_0 u(t)$$

Forma canónica observável

Considere o seguinte sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots\dots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots\dots\dots + a_{n-1}s + a_n}$$

A representação em espaço de estados do sistema anterior na forma canónica observável é dada do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x'_{n-1}(t) \\ x'_{n-2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ..... & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & ..... & 0 & -a_{n-1} \\ . & . & ..... & . & . \\ . & . & ..... & . & . \\ . & . & ..... & . & . \\ 0 & 0 & ..... & . & . \\ 0 & 0 & ..... & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & .... & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t \\ . \\ . \\ x_n(t \end{bmatrix} + b_0 u(t)$$

Forma canónica diagonal

Considere o seguinte sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + ... + b_{n-1} s + b_n}{(s-p_1)(s-p_2)..........(s-p_n)}$$

Caso os pólos de G(s) sejam distintos, então:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + ... + \frac{c_n}{s-p_n}$$

A representação em espaço de estados do sistema anterior na forma canónica diagonal é dada do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x'_{n-1}(t) \\ x'_{n-2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & ..... & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & ..... & 0 & 0 \\ . & . & ..... & . & . \\ . & . & ..... & . & . \\ . & . & ..... & . & . \\ 0 & 0 & ..... & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & ..... & 0 & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & .... & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t \\ . \\ . \\ x_n(t \end{bmatrix} + b_0 u(t)$$

Forma canónica de Jordan (pólos múltiplos)

Considere o seguinte sistema:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + ...+ b_{n-1}s + b_n}{(s-p_1)^3(s-p_2)..........(s-p_n)}$$

A representação em espaço de estados do sistema anterior na forma canónica diagonal é dada do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1}'(t) \\ x_{n-2}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 0 & .... & . \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & .... & . \\ . & . & . & . & .... & . \\ 0 & . & . & . & .... & 0 \\ 0 & . & . & . & .... & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & .... & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t \\ . \\ . \\ x_n(t \end{bmatrix} + b_0 u(t)$$

Exemplo

1. Faça a representação do sistema seguinte nas formas canónicas controlável, observável e diagonal.

$$G(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

Exercícios

1) Considere-se o sistema contínuo dado por:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s+a}$$

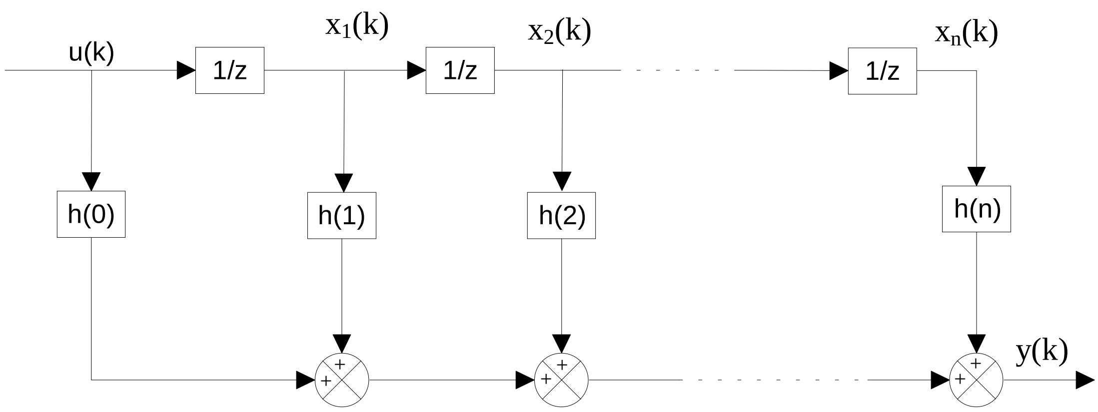
a. Obtenha a representação em espaço de estados do sistema em contínuo.
b. Discretize a equação de estado e da saída.
c. Utilizando a equação $F(z)=C(zI-G)^{-1}H+D$ obtenha a função de transferência para uma entrada a pulso.

2) Considere a seguinte função de transferência:

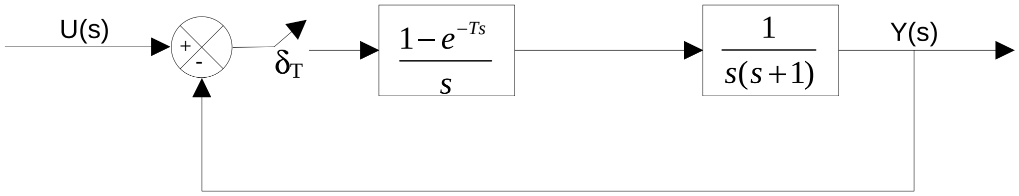
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s(s+2)}$$

a. Obtenha a representação em espaço de estados do sistema em contínuo.
b. Discretize a equação de estado e da saída.
c. Utilizando a equação $F(z)=C(zI-G)^{-1}H+D$ obtenha a função de transferência para uma entrada a pulso.

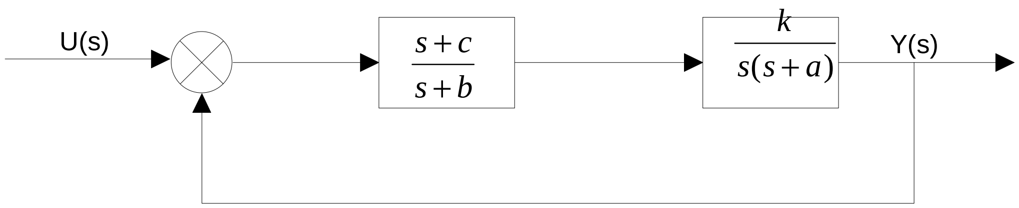
3) Obtenha a representação em espaço de estados para o sistema apresentado na figura seguinte:



4) Obtenha a representação em espaço de estados para o sistema apresentado na figura seguinte:



5) Obtenha a representação em espaço de estados para o sistema apresentado na figura seguinte:



6) Obtenha a matriz de transição do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenha também a inversa da matriz de transição.

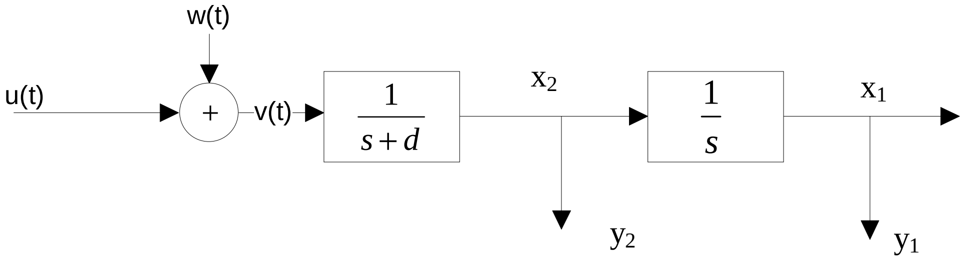
7) Obtenha a resposta temporal do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

INSTITUTO POLITÉCNICO DE TOMAR

Engenharia Electrotécnica

8) O diagrama de blocos da figura seguinte representa o modelo de um motor dc controlado por armadura, em que w(t) representa uma entrada de ruído (perturbação à entrada).



(d depende da fricção viscosa)

a. Determine o modelo em espaço de estados.

b. Determine o modelo em espaço de estados do sistema amostrado (período de amostragem h com zoh).

c. Determine a função de transferência discreta.

9) Considere um processo físico representado pela função de transferência:

$G(s) = 2(s+3)^{-1}.e^{-\upsilon s}$ em que σ = 2.5 amostrada com um período h = 1 s.

a. Determine a equação em espaço de estados do sistema amostrado.

b. Determine a função G(z) discreta (com zoh).

c. Compare os pólos de G(s) com os de G(z).

d. Repita as alíneas anteriores considerando h = 0.5s.